Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

PTC3405 - Processos Estocásticos - 1o semestre 2019

Exercício Computacional 2 - GABARITO COMPACTO

Nesse exercício computacional, você deve resolver as duas questões a seguir. Detalhe suas respostas o máximo possível explicando passo a passo a sua solução. É fundamental colocar os programas utilizados para gerar os gráficos pedidos.

1) [Kay, 2005, p. 632]Um processo aleatório ESA de tempo discreto $X[n]$ é definido pela equação de diferenças $X[n] = aX[n-1] + U[n] - bU[n-1]$, em que $U[n]$ é um processo WGN com variância $\sigma_U^2 = 1$. Faça um gráfico da DEP de $X[n]$ para $a = 0{,}9$ e $b = 0{,}2$. Repita para $a = 0{,}2$ e $b = 0{,}9$. Detalhe como você obteve os gráficos e comente seus resultados.

O programa a seguir resolve o problema. Note que os filtros são inversos um do outros. Ou seja, ao concatená-los, tem-se um filtro passa-tudo, como mostrado no gráfico. da Figura 2

```
%%Exercício 1
clear all; close all;
Npontos = 2^10;
sigmau2 = 1;
%%%%Filtro 1
a = 0.9;
b = 0.2;
[H1] = freqz([1 -b], [1 -a],Npontos, 'whole');
w = linspace(-pi,pi,Npontos); H1 = fftshift(H1); %Para fazer entre -pi e pi
Sxx1 = sigmau2*abs(H1).^2;

%%%%Filtro 2
a = 0.2;
b = 0.9;
[H2] = freqz([1 -b], [1 -a],Npontos, 'whole');
w = linspace(-pi,pi,Npontos); H2 = fftshift(H2); %Para fazer entre -pi e pi
Sxx2 = sigmau2*abs(H2).^2;

%Gráficos
figure(1);
subplot(211); plot(w/pi,Sxx1); grid; xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Sxx(\omega)'); title('Filtro 1');
subplot(212); plot(w/pi,Sxx2); grid; xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Sxx(\omega)'); title('Filtro 2');

figure(2);
%%%Filtros inversos
plot(w/pi,abs(H1.*H2))
```

```
grid; xlabel('\omega/\pi'); ylabel('|H_1(\omega)H_2(\omega)|'); title('
    Resposta combinada');
```

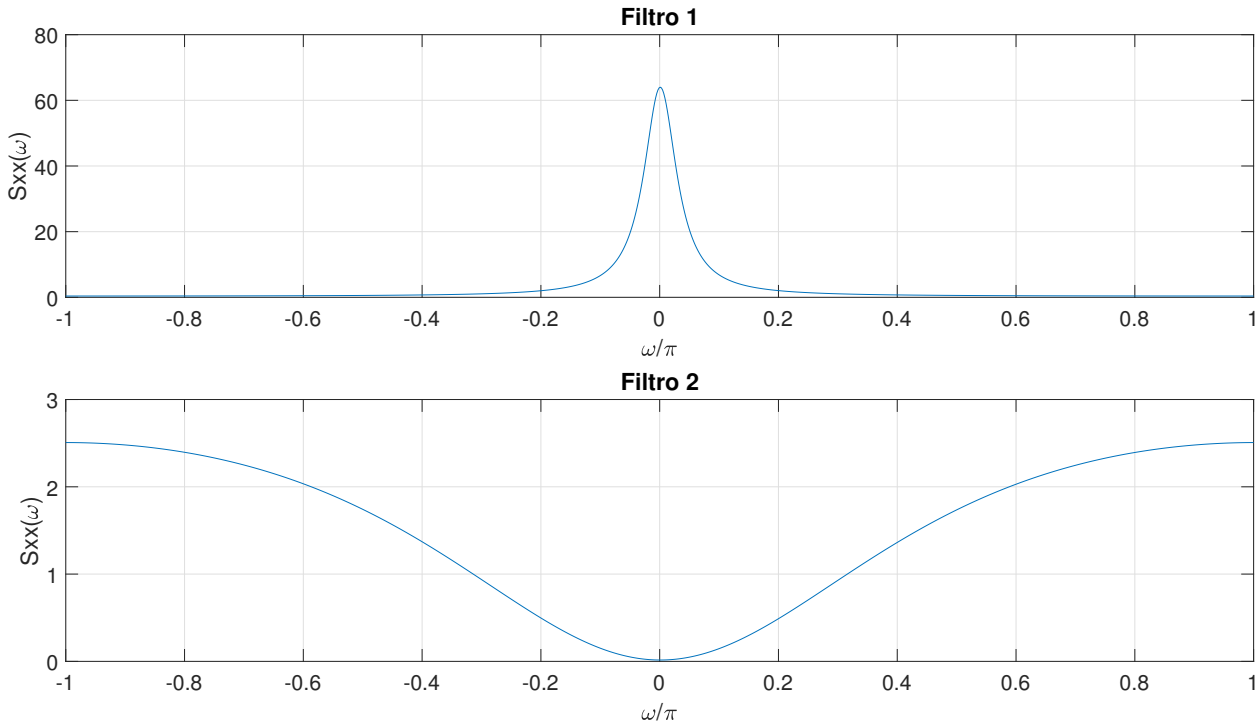

Figura 1: DEP dos processos filtrados do Exercício 1.

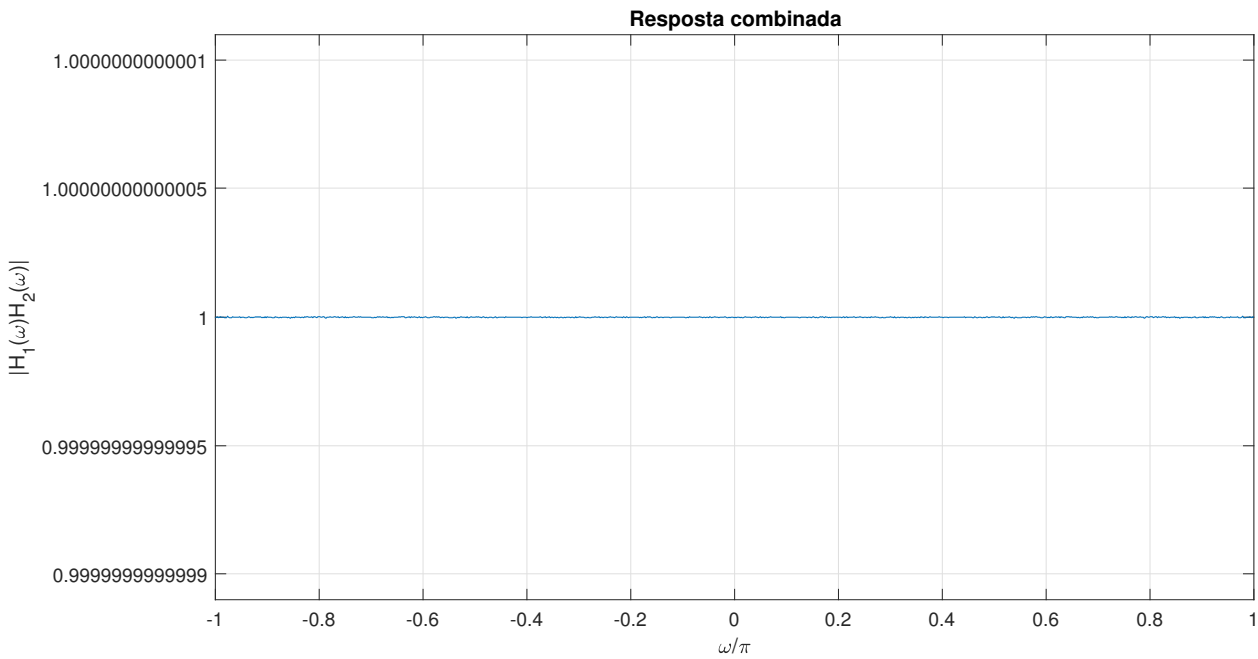

Figura 2: Resposta em frequência dos filtros em cascata.

2) [Kay, 2005, p. 632]Um processo AR de ordem 2 é dado pela equação de diferenças recursiva

$$X[n] = 2r\cos(2\pi f_0)X[n-1] - r^2X[n-2] + U[n],$$

em que $U[n]$ é WGN com variância $\sigma_U^2 = 1$. Obtenha um gráfico da DEP de $X[n]$ para $r = 0{,}7$ e $f = 0{,}1$. Repita para $r = 0{,}95$ e $f = 0{,}1$. Explique os resultados que você obteve. Dica: Determine a localização dos polos de $H(z)$.

Os polos de $H(z)$ são $re^{\pm j2\pi f_0}$. Assim, para $r < 1$ a resposta em frequência dos filtro $H(z) = \frac{X(z)}{U(z)}$ apresenta máximos nas frequências $\pm j2\pi f_0$. Quanto mais próximo r está da unidade, mais próximos da circunferência unitária estão os polos e mais pronunciados os picos na resposta em frequência. Segue o programa que resolve o problema e os gráficos de DEP solicitados.

```
%%Exercício 2
clear all; close all;
Npontos = 2^10;
sigmau2 = 1;

%%%%Filtro 1
r1 = 0.7;
f01 = 0.1;
[H1] = freqz([1], [1 -2*r1*cos(2*pi*f01) r1^2],Npontos, 'whole');
w = linspace(-pi,pi,Npontos); H1 = fftshift(H1); %Para fazer entre -pi e pi
Sxx1 = sigmau2*abs(H1).^2;


%%Filtro 2
r2 = 0.95;
f02 = 0.1;
[H2] = freqz([1], [1 -2*r2*cos(2*pi*f02) r2^2],Npontos, 'whole');
w = linspace(-pi,pi,Npontos); H2 = fftshift(H2); %Para fazer entre -pi e pi
Sxx2 = sigmau2*abs(H2).^2;

%Gráficos
subplot(221); plot(w/pi,Sxx1); grid; xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Sxx(\
    omega)'); title('Filtro 1');
subplot(222); zplane([1], [1 -2*r1*cos(2*pi*f01) r1^2]); grid;
subplot(223); plot(w/pi,Sxx2); grid; xlabel('\omega/\pi'); ylabel('Sxx(\
    omega)'); title('Filtro 2');
subplot(224); zplane([1], [1 -2*r2*cos(2*pi*f02) r2^2]); grid;
```

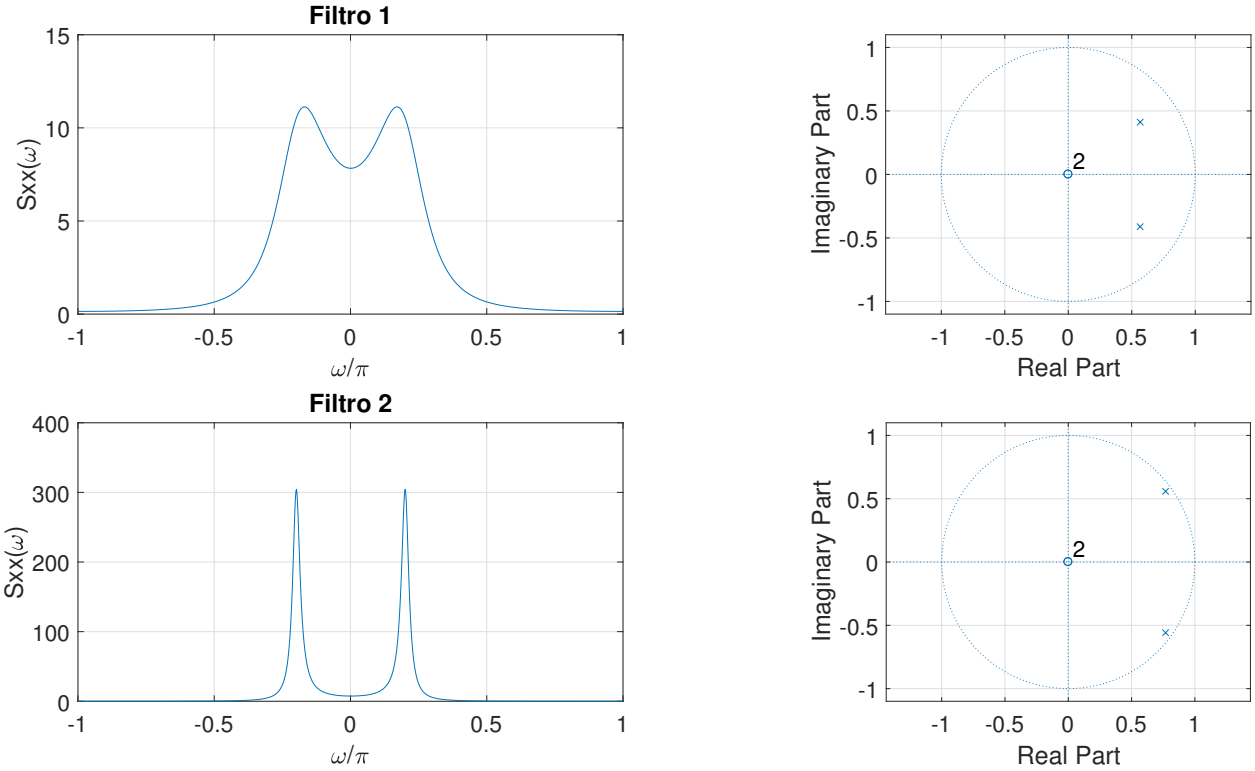

Figura 3: DEP dos processos filtrados e localização de polos e zeros do sistema do Exercício 2.

Referências

Kay, S. (2005). *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®*. Springer US.