PTC3405 - Processos Estocásticos - 1o semestre 2019

Exercício Computacional 1

Gabarito Compacto

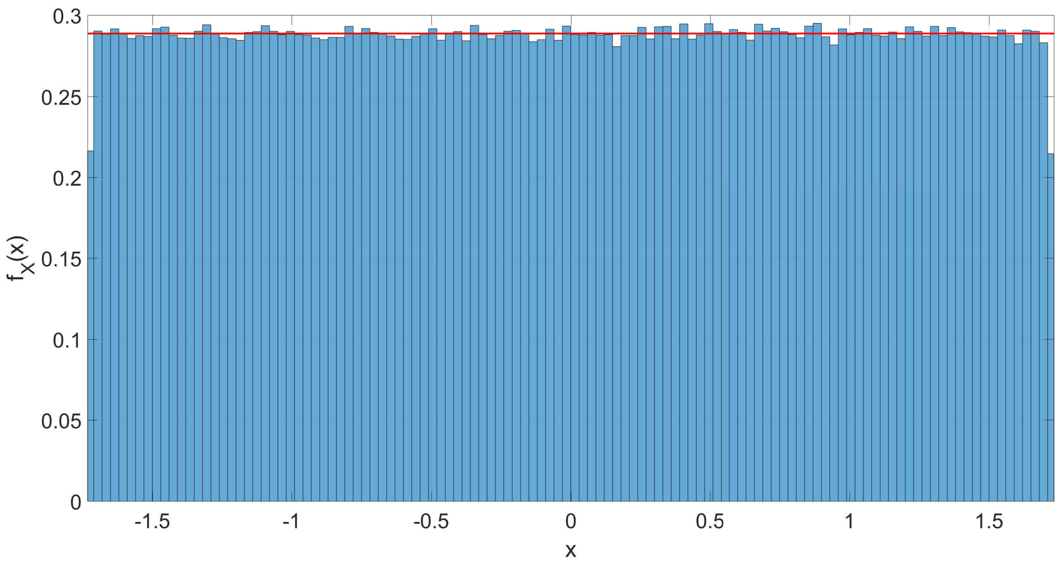
Nesse exercício computacional, vamos mostrar um exemplo simples do Teorema do Limite Central e da geração computacional de uma variável aleatória.

1) Vamos começar com uma VA uniforme $X \sim U[m,n]$. Queremos que nossa VA tenha média nula e variância unitária ($\sigma_X^2 = 1$). Determine m e n que atendam essa condição. Mostre seus cálculos.

   Mostramos em aula que para uma VA $X \sim U[m,n]$, $E[X] = \frac{m+n}{2}$ e $\sigma_X^2 = \frac{(m-n)^2}{2}$. Assim, fazendo $\frac{m+n}{2} = 0$ e $\frac{(m-n)^2}{2} = 1$ obtém-se $m = -\sqrt{3}$ e $n = \sqrt{3}$.

2) (Computacional) Gere computacionalmente 10^7 realizações da VA X. Estime sua fdp a partir de um histograma. Estime também sua média e variância. Use as funções Matlab `rand`, `histogram`, `mean` e `var`ou os equivalente do `numpy`. Mostre todos os comandos utilizados e comente seus resultados. Quanto mais detalhes melhor.

```
Npontos = 1e7;
x = 2*sqrt(3)*rand(1,Npontos)-sqrt(3);
Ex = mean(x);
varX = var(x);
display(['E[X]=' num2str(Ex)]);
display(['var[X]=' num2str(varX)]);
histogram(x(1,:),'Normalization','pdf');
hold on;
plot ([-sqrt(3) sqrt(3)], [1/(2*sqrt(3)) 1/(2*sqrt(3))], 'r', 'Linewidth',
    2);
xlim([-sqrt(3) sqrt(3)]);
grid;
xlabel('x');
ylabel('f_X(x)');
```



3) Agora, sejam $X_1, X_2, ..., X_n, ...,$ VAs com fdps idêntica à de X do item (a) e independentes entre si. Seja a nova VA

$$Y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} X_n.$$

Calcule $E[Y]$, $E[Y^2]$ e $\text{var}[Y]$.

$$E[Y] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} E[X_n] = 0$$

$$\text{var}[Y] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \text{var}[X_n] = 1$$

$$E[Y^2] = \text{var}[Y] + E[Y]^2 = 1$$

4) Para o caso $N = 2$, obtenha analiticamente a fdp de Y.

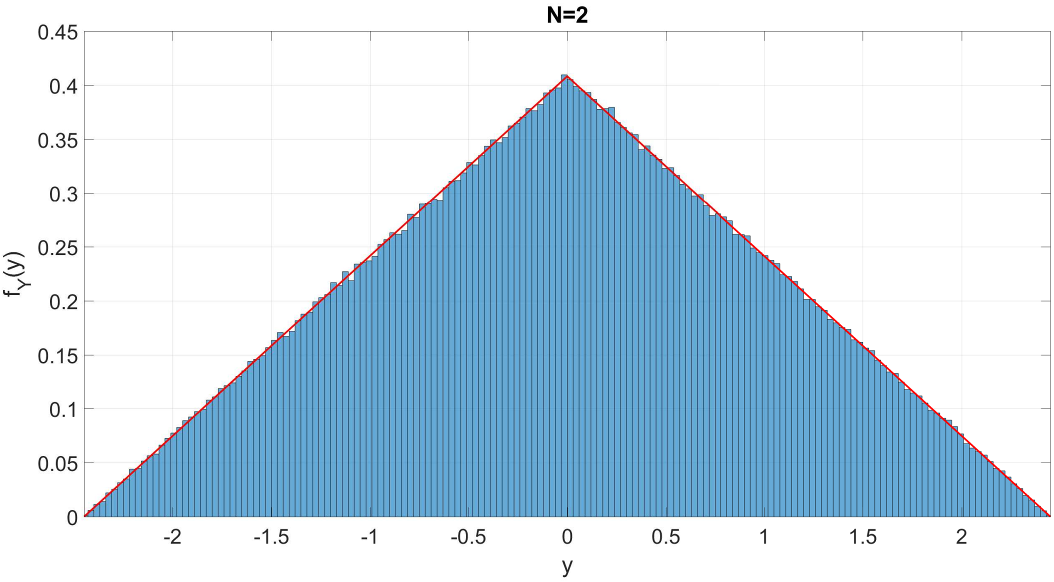
Mostramos em aula que se $Y_1 = X_1 + X_2$,

$$f_{Y_1}(y_1) = f_{X_1}(y_1) * f_{X_2}(y_1)$$

Assim, $f_{Y_1}(y_1)$ é uma função triangular com base $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ e altura $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
Veja que $Y = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_1$. Assim, da fórmula deduzida para transformações monotônicas, $f_Y(y) = \sqrt{2} f_{Y_1}\left(\sqrt{2}y\right)$. Portanto, $f_Y(y)$ é um triângulo de base $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ e altura $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

5) (Computacional) Gere computacionalmente 10^7 realizações da VA Y para o caso $N = 2$. Estime sua média, variância e fdp a partir de um histograma. Compare com os resultados esperados obtidos nos itens 3) e 4).

```
N = 2;
Npontos = 1e7;
x = 2*sqrt(3)*rand(N,Npontos)-sqrt(3);
y = 1/sqrt((N))*(sum(x(1:N,:)));
Ey = mean(y);
vary = var(y);
display(['E[Y]=' num2str(Ey)]);
display(['var[Y]=' num2str(vary)]);
histogram(y,'Normalization','pdf');
hold on;
plot ([-sqrt(6) 0 sqrt(6)], [0 sqrt(6)/6 0], 'r', 'Linewidth', 2);
xlim([-sqrt(6) sqrt(6)]); grid;
hold off;
```



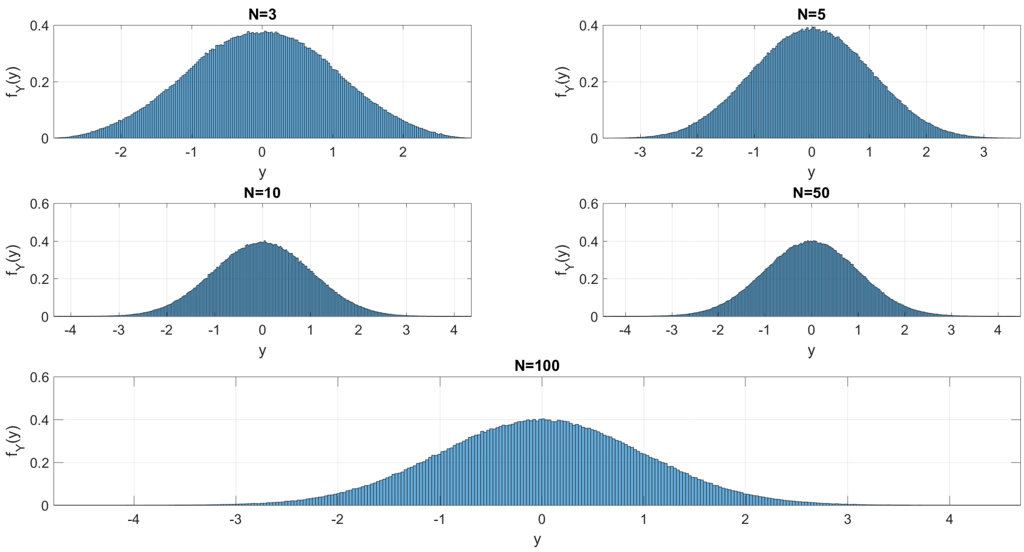
6) Para $N \to \infty$ qual deve ser a distribuição de Y? Justifique.

Pelo Teorema do Limite Central, $f_Y(y)$ tende a uma gaussiana, Como a média e variância de Y não dependem de N, concluímos que, no limite em que $N \to \infty$, $Y \sim N(0,1)$.

7) (Computacional) Gere computacionalmente 10^7 realizações da VA Y para $N = 3$, $N = 5$, $N = 10$, $N = 50$ e $N = 100$. Usando `subplot` obtenha numa mesma figura estimativas da fdp para esses casos. Comente seus resultados.

```
clear all; close all;
Npontos = 1e7;
N = 100;
x = 2*sqrt(3)*rand(N,Npontos)-sqrt(3);
y3 = 1/sqrt((3))*(sum(x(1:3,:)));
y5 = 1/sqrt((5))*(sum(x(1:5,:)));
y10 = 1/sqrt((10))*(sum(x(1:10,:)));
y50 = 1/sqrt((50))*(sum(x(1:50,:)));
y100 = 1/sqrt((100))*(sum(x(1:100,:)));
subplot(321);
histogram(y3,'Normalization','pdf');
xlim([min(y3) max(y3)]); grid;
xlabel('y');
```

```
ylabel('f_Y(y)');
title('N=3');
subplot(322);
histogram(y5,'Normalization','pdf');
xlim([min(y5) max(y5)]); grid;
xlabel('y');
ylabel('f_Y(y)');
title('N=5');
subplot(323);
histogram(y10,'Normalization','pdf');
xlim([min(y10) max(y10)]); grid;
xlabel('y');
ylabel('f_Y(y)');
title('N=10');
subplot(324);
histogram(y50,'Normalization','pdf');
xlim([min(y50) max(y50)]); grid;
xlabel('y');
ylabel('f_Y(y)');
title('N=50');
subplot(313);
histogram(y100,'Normalization','pdf');
xlim([min(y100) max(y100)]); grid;
xlabel('y');
ylabel('f_Y(y)');
title('N=100');
```



8) (Computacional) Para o caso $N = 100$, faça num mesmo gráfico a estimativa da fdp via histograma e o gráfico da fdp esperada a partir do resultado do item 6). Comente seus resultados.

Continuando a partir da listagem do item anterior:

```
figure(2);
histogram(y100,'Normalization','pdf');
xlim([min(y100) max(y100)]);
xlabel('y');
```

```
ylabel('f_Y(y)');
title('N=100');
yteor = linspace(-4,6,1000);
mu = 0; sigma2=1;
fyteor = 1/sqrt(2*pi*sigma2)*exp(-(yteor-mu).^2/(2*sigma2));
hold on;
plot(yteor,fyteor,'Linewidth', 2);  grid;
hold off;
```