Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

PTC3405 - Processos Estocásticos - 1o semestre 2019

Lista de Exercícios Suplementares 1

1) [Neto/Cymbalista, 2006] Considere dos eventos A e B tais que $P[A] = \frac{1}{4}$, $P[B|A] = \frac{1}{2}$ e $P[A|B] = \frac{1}{4}$.

   (a) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Justifique.

   (b) Os eventos A e B são independentes? Justifique.

   (c) Calcule $P\left[\overline{A}|\overline{B}\right]$, $P\left[\overline{A}|B\right] + P\left[A|B\right]$ e $P\left[A|\overline{B}\right]$

   R: (a) Não; (b) Sim; (c) $\frac{3}{4}$, 1 e $\frac{1}{4}$, respectivamente.

2) [Neto/Cymbalista, 2006, Adaptado] Jadson e Rodriguinho estão machucados e talvez não possam defender o Corinthians em sua próxima partida contra o Palmeiras. A probabilidade de Jadson jogar é de 40% e a de Rodriguinho, 70%. Com ambos os jogadores, o Corinthians terá 60% de probabilidade de vitória; sem nenhum deles, 30%; com Jadson, mas sem Rodriguinho, 50%, e com Rodriguinho, mas sem Jadson, 40%. Qual é a probabilidade de o Corinthians ganhar a partida?

   R: 100% (brincadeirinha.... 45%)

3) [Peebles, 2000, p. 101] Certo medidor é projetado para medir pequenas tensões dc, mas comete erros por causa de ruído. Estes erros podem ser representados de forma precisa por uma variável aleatória gaussiana com média zero e desvio padrão 10^{-3} V. Quando a tensão dc está desconectada descobre-se que a probabilidade do medidor registrar um valor positivo é 0,5 por causa do ruído. Quando a tensão dc está presente, esta probabilidade torna-se 0,2514. Qual o valor da tensão dc?

   R: $-0{,}67$ mV.

4) [Neto/Cymbalista, 2006] Certo tipo de resistor é considerado aceitável se seu valor estiver entre 45 e 55 Ω e é considerado ideal se estiver entre 48 e 52 Ω. O valor desses resistores tem distribuição normal com média de 53 Ω e desvio padrão de 3 Ω. Em um lote de 200 resistores aceitáveis, quantos resistores ideais devem-se esperar?

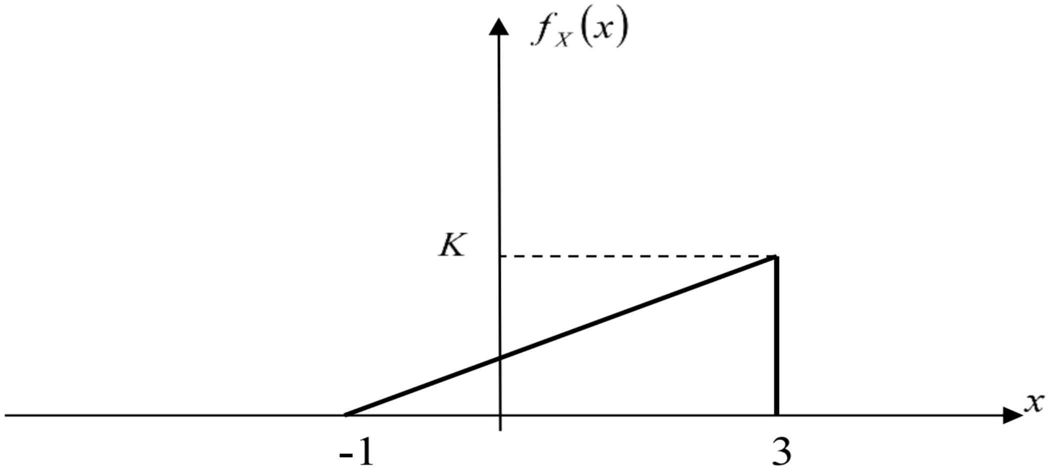
   R: 47,06%

5) [Papoulis and Pillai, 2002, p. 87] Suponha que o tempo de espera de um cliente por uma mesa num restaurante seja uma distribuição exponencial com média 5 minutos. Determine a probabilidade de que um cliente espere mais do que 10 minutos por uma mesa.

   Dado: fdp exponencial: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$.

   R: 13,53%

6) [Lathi, 1998, p. 485] Encontre a média, a média quadrática e a variância da variável aleatória X cuja fdp é dada pela figura a seguir.



R: $\overline{X} = \frac{5}{3}$; $E\left[X^2\right] = \frac{17}{6}$; $\sigma_X^2 = \frac{1}{18}$.

7) [Hsu, 1996, p. 133] Seja $Y = e^X$. Encontre e esboce a pdf de Y se X é uma VA uniforme no intervalo [0,1]. Confira seu resultado gerando computacionalmente Y e estimando a fdp pelo seu histograma.

R: $f_Y(y) = \frac{1}{y}\left(u(y-e) - u(y-1)\right)$.

8) [Peebles, 2000, p. 94, adaptado] Um programa de simulação matemática pode gerar números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo (0,1). Num problema de processamento de sinais envolvendo *wavelets* beta, é necessário gerar uma VA Y com a distribuição conhecida como "distribuição arcoseno" e com fdp dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}},$$

para $0 < y < 1$. Explique como gerar números com essa distribuição.

Mureddu et al. [2018]

9) [Hsu, 1996, p. 87] A fdp conjunta de uma VA bivariada (X,Y) é dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que k é uma constante. Pede-se:

(a) Encontre o valor de k .

(b) X e Y são independentes?

(c) Encontre $P(X + Y < 1)$.

R: (a) 4; (b) Não; (c) $\frac{1}{6}$

10) [Peebles, 2000, p. 173] $\overline{X} = \frac{1}{2}$, $\overline{X^2} = \frac{5}{2}$, $\bar{Y} = 2$, $\overline{Y^2} = \frac{19}{2}$ e $C_{XY} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ para VAs X e Y.

a) Encontre σ_X^2, σ_Y^2, R_{XY} e ρ_{XY}.

b) Qual a média da VA $W = (X+3Y)^2 + 2X + 3$?

R: (a) $\sigma_X^2 = \frac{9}{4}$; $\sigma_Y^2 = \frac{11}{2}$; $R_{XY} = \frac{6-\sqrt{3}}{6}$; $\rho_{XY} = \frac{-\sqrt{66}}{99}$; (b) 96,27

11) [Lathi, 1998, p. 486] Duas VAs X e Y são relacionadas por

$$Y = k_1 X + k_2$$

em que k_1 e k_2 são constantes arbitrárias. Mostre que o coeficiente de correlação é $\rho_{XY} = 1$ se k_1 for positivo e $\rho_{XY} = -1$ se k_1 for negativo.

12) [Peebles, 2000, p. 178] Uma variável aleatória complexa Z é definida por

$$Z = \cos(X) + j\sin(Y),$$

em que X e Y são VAs independentes uniformemente distribuídas entre $-\pi$ e π.

a) Encontre o valor médio de Z.

b) Encontre a variância de Z.

13) [Peebles, 2000, p. 173] Em um sistema de controle, sabe-se que uma tensão aleatória X tem valor médio $\overline{X} = m_1 = -2$ V e um momento de segunda ordem $E\left[X^2\right] = m_2 = 9$ V^2. Se a tensão X é amplificada por um amplificador que tem como saída $Y = -1{,}5X + 2$, encontre σ_X^2, $\overline{Y}$, $E\left[Y^2\right]$, σ_Y^2 e R_{XY}.

R: $\sigma_X^2 = 5$, $\overline{Y} = 5$, $E\left[Y^2\right] = 36{,}25$, $\sigma_Y^2 = 11{,}25$ e $R_{XY} = -17{,}5$.

14) [Devore, 2014] Dois componentes de um microcomputador têm a seguinte fdp conjunta para seus tempos de vida útil X e Y:

$$f_X Y(x,y) = xe^{-x(1+y)}u(x)u(y).$$

a) Quais são as fdps marginais de X e Y? Estes tempos de vida são independentes? Justifique.

b) Qual a probabilidade de que o tempo de vida X do primeiro componente exceda 3?

R: (a) $f_X(x) = e^{-x}u(x)$, $f_Y(y) = \frac{1}{(1+y)^2}$, Não. (b) 0,0498.

15) [Lathi, 1998, p. 483] A fdp conjunta $f_{XY}(x,y)$ de duas VAs contínuas é dada por

$$f_{XY}(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}u(x)u(y).$$

a) Determine $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X|Y}(x|y)$ e $f_{Y|X}(y|x)$.

b) X e Y são independentes?

R: (a) $f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}u(x)$, $f_Y(y) = ye^{-\frac{y^2}{2}}u(y)$, $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ e $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$. (b) Sim!

16) (P1 - 2018) Num sistema de comunicação binário polar, transmite-se os símbolos equiprováveis -1 ou 1. Definindo-se a VA X como o símbolo transmitido num certo instante, ela assume apenas dois valores com probabilidades não nulas ($X = -1$ e $X = 1$). Pede-se:

a) Escreva uma expressão para a fdp da VA X e esboce seu gráfico.

b) Em certas condições, a decisão no receptor sobre qual foi o símbolo transmitido precisa ser tomada em cima de uma VA $Y = X + R$ em que $R \sim N(0,\sigma_r^2)$, sendo σ_r^2 a potência do ruído no canal. Escreva uma expressão para $f_Y(y)$ e esboce seu gráfico.

R: (a) $f_X(x) = 0{,}5\delta(x+1) + 0{,}5\delta(x-1)$; (b) $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_r^2}}\left(e^{\frac{-(y+1)^2}{2\sigma_r^2}} + e^{\frac{-(y-1)^2}{2\sigma_r^2}}\right)$

Referências

Devore, J. L. (2014). *Probabilidade e Estatística Para Engenharia e Ciências (Em Portuguese do Brasil)*. Cengage CTP, 8th edition.

Hsu, H. (1996). *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes*. Schaum's Outlines. McGraw-Hill.

Lathi, B. P. (1998). *Modern Digital and Analog Communication Systems (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. Oxford University Press, New York, NY, USA, 3.ed edition.

Mureddu, M., Facchini, A., Scala, A., Caldarelli, G., and Damiano, A. (2018). A complex network approach for the estimation of the energy demand of electric mobility. *Scientific Reports*, 8(1).

Neto/Cymbalista, C. (2006). *Probabilidades (Em Portuguese do Brasil)*. Blucher.

Papoulis, A. and Pillai, S. U. (2002). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Europe.

Peebles, P. (2000). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.