

5.2- Efeito do controle proporcional na resposta de um processo

A resposta em malha fechada de um processo é dada pela equação 5.7. Para simplificar a análise vamos assumir que $G_m(s)=1$ e $G_f(s)=1$. Além disso, para o controlador proporcional $G_c(s)=K_c$ e a equação 5.7 se transforma em:

$$y(s) = \frac{G_p K_c}{1 + G_p K_c} y_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + G_p K_c} d(s) \quad (5.20)$$

5.2.1-Sistemas de primeira ordem:

Para sistemas de primeira ordem

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p m + K_d d \quad (5.21)$$

com $y(0)=m(0)=d(0)=0$

Isto leva à seguinte função de transferência:

$$y(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} m(s) + \frac{K_d}{\tau_p s + 1} d(s) \quad (5.22)$$

Então, para o sistema sem controle temos:

- constante de tempo: τ_p
- Ganhos estáticos: K_p para a variável manipulada e K_d para a carga

Substitua:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad \text{e} \quad G_d(s) = \frac{K_d}{\tau_p s + 1}$$

na equação 5.20 e obtenha a resposta em malha fechada:

$$y(s) = \frac{K_p K_c}{\tau_p s + 1 + K_p K_c} y_{sp}(s) + \frac{K_d}{\tau_p s + 1 + K_p K_c} d(s) \quad (5.23)$$

que pode ser reescrita como:

$$y(s) = \frac{K'_p}{\tau'_p s + 1} y_{sp}(s) + \frac{K'_d}{\tau'_p s + 1} d(s) \quad (5.24)$$

em que

$$\tau'_p = \frac{\tau_p}{1 + K_p K_c}$$

$$K'_p = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c}$$

e

$$K'_d = \frac{K_d}{1 + K_p K_c}$$

Os parâmetros K'_p e K'_d são conhecidos como ganhos estáticos em malha fechada.

Pela equação 5.24 podemos concluir que a resposta em malha fechada de um sistema de primeira ordem tem as seguintes características:

- 1- Permanece de primeira ordem para perturbações de carga e set point.
- 2- A constante de tempo foi reduzida (ou seja, $\tau'_p < \tau_p$), o que significa que a resposta em malha fechada se tornou mais rápida do que a resposta em malha aberta para mudanças no set point ou carga.
- 3- O ganho estático diminuiu.

Para entender melhor o efeito do controlador proporcional, considere um degrau unitário no set point (problema servo) e na carga (problema regulatório) e examine as respostas em malha fechada. Para o problema servo, $y_{sp}(s) = 1/s$ e $d(s) = 0$. então, a equação 5.24 leva a :

$$y(s) = \frac{K'_p}{\tau'_p s + 1} \frac{1}{s}$$

e a inversão

$$y(t) = K'_p (1 - e^{-t/\tau'_p})$$

A figura 5.4a mostra a resposta do sistema em malha fechada para uma perturbação degrau unitário no set point. Notamos que a resposta final, para $t \rightarrow \infty$, nunca atinge o novo valor desejado y_{sp} . Há sempre uma discrepância chamada de *offset* que é igual a

$$offset = \text{novo set point} - \text{valor final da resposta} = 1 - K'_p = 1 - \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} = \frac{1}{1 + K_p K_c}$$

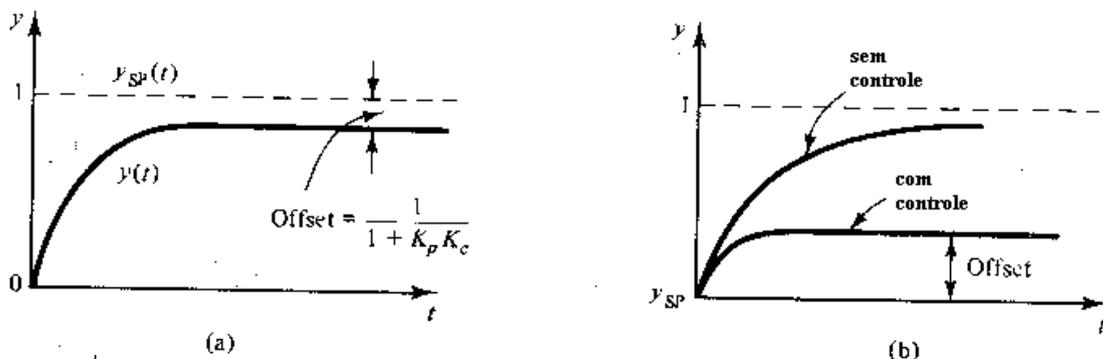


Figura 5.4- Resposta de sistemas de primeira ordem com controle P, para (a) degrau unitário no set point; (b) degrau unitário na carga.

O *offset* é um efeito característico do controle proporcional. Ele diminui conforme K_c aumenta e teoricamente $offset \rightarrow 0$ quando $K_c \rightarrow \infty$.

Para o problema regulatório, $y_{sp}(s)=0$. Considere um degrau unitário na carga, ou seja, $d(s)=1/s$. Então a equação 5.24 leva a:

$$y(s) = \frac{K'_d}{\tau_p s + 1} \frac{1}{s}$$

e depois da inversão

$$y(t) = K'_d (1 - e^{-t/\tau_p})$$

A Figura 5.4b mostra esta resposta. Notamos novamente que o controlador proporcional não consegue manter a resposta no valor desejado, ao invés disso aparece um *offset*:

$$offset = (\text{valor desejado}) - (\text{valor final da resposta}) = 0 - K'_d = -\frac{K_d}{1 + K_p K_c}$$

O benefício do controle proporcional na presença de perturbações de carga pode ser visto na Figura 5.4b. Embora ele não consiga manter a resposta no *set point* e introduza um *offset*, a resposta está muito mais próxima ao *set point* do que se não houvesse controle. Além disso, conforme aumentamos o ganho K_c , o *offset* diminui e teoricamente $offset \rightarrow 0$ quando $K_c \rightarrow \infty$.

Observações:

1- Embora o *offset* tenda a zero quando $K_c \rightarrow \infty$, nunca vamos usar valores muito altos de K_c para controle proporcional. a razão vai se tornar clara no próximo capítulo, em que estudaremos a estabilidade de sistemas em malha fechada.

2- Processos com o termo $1/s$ na sua função de transferência (puramente capacitivos) quando controlados por controlador proporcional não exibem *offset* para mudanças de *setpoint*, mas sim para perturbações sustentadas na carga (por exemplo, perturbação degrau).

5.2.2- Sistemas de segunda ordem (problema servo)

Neste caso examinaremos somente o caso servo. Uma análise similar para o caso regulatório pode ser facilmente realizada.

A função de transferência para um sistema de segunda ordem é

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{m(s)} = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (5.25)$$

Substitua esta equação na equação 5.20 e, lembrando que para o problema servo $d(s)=0$, temos:

$$y(s) = \frac{K'_p}{(\tau')^2 s^2 + 2\xi' \tau' s + 1} y_{sp}(s) \quad (5.26)$$

em que

$$\tau' = \frac{\tau_p}{\sqrt{1 + K_p K_c}}$$

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K_p K_c}}$$

$$K'_p = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c}$$

Da equação acima vemos que a resposta em malha fechada de um sistema de segunda ordem com controle proporcional tem as seguintes características:

- A resposta continua sendo de segunda ordem.
- O ganho estático diminui.
- Tanto o período natural quanto o fator de amortecimento diminuem. Isto significa que um sistema super amortecido, com controle proporcional e valor apropriado de K_c , pode se tornar sub amortecido (oscilatório).

Considere um degrau unitário no *set point* ($y_{sp}(s)=1/s$). Então

$$y(s) = \frac{K'_p}{(\tau')^2 s^2 + 2\xi' \tau' s + 1} \frac{1}{s}$$

Dependendo do valor de ξ' , a inversa da expressão acima pode ser dada por:

- eq. 3.10 para o caso super amortecido ($\xi' > 1$), ou
- eq. 3.11 para o caso criticamente amortecido ($\xi' = 1$), ou
- eq. 3.12 para o caso sub amortecido ($\xi' < 1$)

Independentemente do valor particular de ξ' , o valor final da resposta pode ser encontrado pelo teorema do valor final. Então

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s y(s)] = K'_p = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c}$$

Consequentemente, novamente notamos a existência de *offset*:

$$\text{offset} = \text{novo set point} - \text{valor final da resposta} = 1 - \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} = \frac{1}{1 + K_p K_c}$$

Novamente, $\text{offset} \rightarrow 0$ quando $K_c \rightarrow \infty$.

Observações:

1- Se $\xi' > 1$, a resposta do sistema em malha fechada é super amortecida e muito lenta. Então preferimos aumentar o valor de K_c e fazer $\xi' < 1$. Assim, a resposta em malha fechada reage mais rápido, mas se torna oscilatória. Além disso, aumentando K_c o *offset* diminui.

2- O aumento da velocidade da resposta do sistema e diminuição do *offset*, características desejáveis, levam a maiores *overshoots* (erros máximos) e respostas oscilatórias por mais tempo. Então, conforme K_c aumenta, fazendo com que ξ' diminua:

- pela equação que define o *overshoot* (página 39) vemos que este aumenta
- pela equação que define a razão de declínio (página 40) vemos que esta também aumenta
- pela equação que define o período de oscilação, T (página 40), vemos que este diminui

Todas as características descritas acima estão mostradas na Figura 5.5.

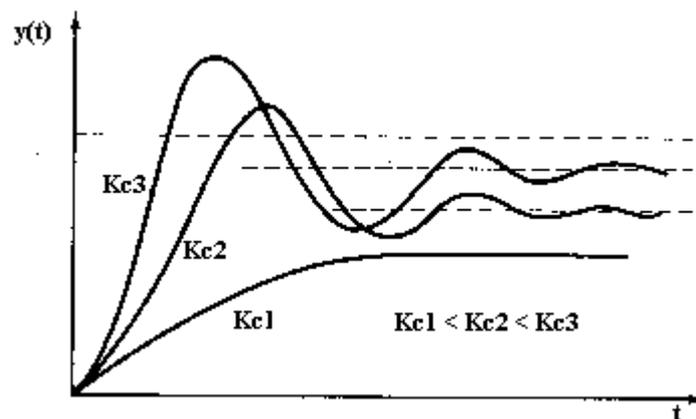


Figura 5.5- Efeito do ganho do controlador proporcional na resposta em malha fechada de um sistema de segunda ordem com controle proporcional.

5.3- Efeito da ação de controle integral

Nesta seção vamos repetir a análise feita na seção passada, mas usando um controlador integral ao invés de um proporcional. Olharemos somente o problema servo para sistemas de primeira ordem; no caso regulatório e para sistemas de ordem maior a metodologia é a mesma.

Para um sistema de primeira ordem temos:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

E para controle integral puro temos:

$$G_c(s) = K_c \frac{1}{\tau_I s}$$

Substituindo G_p e G_c na equação 5.20, com $d(s)=0$, temos:

$$y(s) = \frac{\left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)\left(K_c \frac{1}{\tau_I s}\right)}{1 + \left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)\left(K_c \frac{1}{\tau_I s}\right)} y_{sp}(s)$$

ou

$$y(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} y_{sp}(s) \quad (5.27)$$

em que:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_I \tau_p}{K_p K_c}} \quad (5.28)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{\tau_p K_p K_c}} \quad (5.29)$$

A equação 5.27 mostra um efeito importante da ação de controle integral: ela aumenta a ordem da resposta em malha fechada. Assim, para um sistema que é de primeira ordem sem controle, a resposta em malha fechada se torna de segunda ordem e conseqüentemente pode apresentar características dinâmicas completamente diferentes. Além disso, como vimos anteriormente, aumentando a ordem de um sistema tornamos a sua resposta mais lenta. Assim, a ação de controle integral pura deve fazer com que a resposta do sistema em malha fechada se torne mais lenta.

vamos examinar o comportamento dinâmico de um sistema em malha fechada quando o *set point* muda por um degrau unitário. Da equação 5.27 temos:

$$y(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \frac{1}{s}$$

A forma da resposta $y(t)$ depende do valor de ξ , mas o valor final da resposta pode ser encontrado usando o teorema do valor final:

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s y(s)] = 1$$

Logo,

$$offset = 1 - 1 = 0$$

Isto mostra o efeito mais característico da ação integral: A ação de controle integral elimina qualquer *offset*.

Pode-se verificar facilmente que para o problema regulatório a ação de controle integral produz uma resposta em malha fechada também sem *offset*.

Observações:

- A equação 5.29 mostra que a forma da resposta em malha fechada (ou seja, super amortecida, criticamente amortecida ou sub amortecida) depende do valor do ganho do controlador, K_c , e da constante de tempo integral, τ_I . Assim, sintonizar estes parâmetros é uma questão importante que será discutida mais tarde.

- Da equação 5.29 vemos, ainda, que, conforme K_c aumenta, o fator de amortecimento ξ diminui. As consequências da diminuição de ξ são:

(a) A resposta em geral se transforma de lenta e super amortecida em rápida porém oscilatória e sub amortecida.

(b) O *overshoot* e a razão de declínio da resposta em malha fechada aumentam.

Assim, pode-se concluir que podemos melhorar a velocidade da resposta em malha fechada, mas aumentando os desvios e oscilações. A Figura 5.6 mostra estas características para mudanças de set point.

- Da equação 5.29 vemos também que conforme τ_I diminui, ξ diminui também. Entretanto, as consequências de diminuir τ_I na resposta em malha fechada são as mesmas descritas acima. A figura 5.7 mostra estes efeitos.

- As conclusões acima podem ser resumidas da seguinte forma:

Aumentando a ação de controle integral (ou seja, aumentando K_c e diminuindo τ_I) a resposta em malha fechada se torna mais sensível. Mais tarde veremos que isto pode levar à instabilidade do sistema.

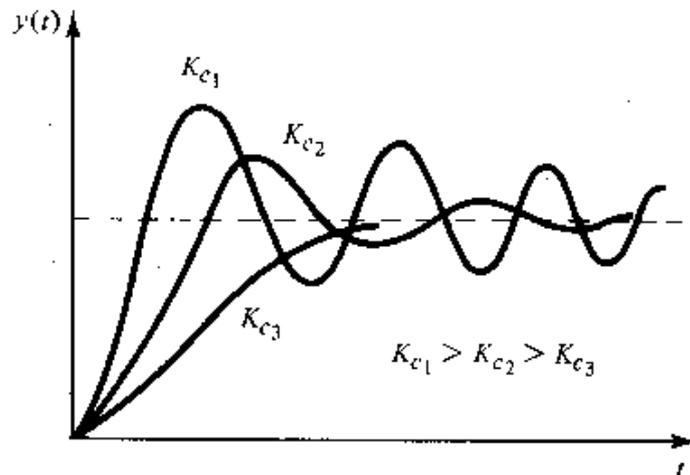


Figura 5.6- Efeito do ganho proporcional na resposta em malha fechada de sistemas de primeira ordem com controle integral.

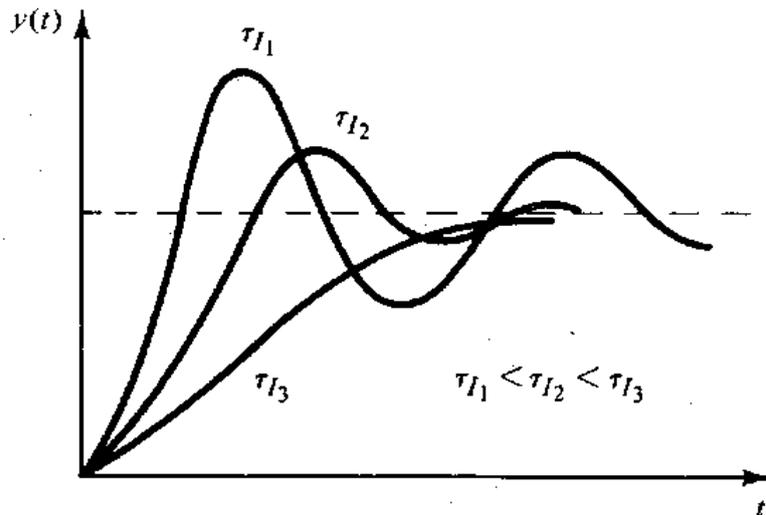


Figura 5.7- Efeito da constante de tempo integral na resposta em malha fechada de sistemas de primeira ordem com controle integral.

5.4- Efeito da ação de controle derivativa

Para ação de controle derivativa somente, temos:

$$G_c = K_c \tau_D s$$

Assumindo para simplificação que $G_m = G_f = 1$, a resposta em malha fechada de um sistema de primeira ordem com ação de controle derivativa é dada por:

$$y(s) = \frac{\left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1} \right) (K_c \tau_D s)}{1 + \left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1} \right) (K_c \tau_D s)} y_{sp}(s)$$

ou

$$y(s) = \frac{K_p K_c \tau_D s}{(\tau_p + K_p K_c \tau_D) s + 1} y_{sp}(s) \quad (5.30)$$

A equação 5.30 leva às seguintes observações sobre os efeitos da ação de controle derivativo na resposta em malha fechada de um sistema:

- A ação de controle derivativa não muda a ordem da resposta. No exemplo acima o sistema permaneceu de primeira ordem.
- A equação 5.30 deixa claro que a constante de tempo efetiva da resposta em malha fechada é $\tau_p + K_p K_c \tau_D$, ou seja, maior do que τ_p . Isto significa que a resposta do processo controlado é mais lenta do que a do processo de primeira ordem original. Além disso, conforme K_c aumenta, a constante de tempo efetiva aumenta e a resposta se torna progressivamente mais lenta.

Outras observações:

1- É bastante interessante examinar o efeito da ação de controle derivativa na resposta de um sistema de segunda ordem. Assumindo novamente que $G_m=G_f=1$, a resposta em malha fechada para o problema servo é:

$$y(s) = \frac{\left(\frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \right) (K_c \tau_D s)}{1 + \left(\frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \right) (K_c \tau_D s)} y_{sp}(s)$$

ou

$$y(s) = \frac{K_p K_c \tau_D s}{\tau^2 s^2 + (2\xi\tau + K_p K_c \tau_D) s + 1} y_{sp}(s)$$

Da última equação observamos que:

(a) O período natural de oscilação da resposta em malha fechada permanece o mesmo enquanto

(b) O novo fator de amortecimento ξ' é dado pela equação

$$2\xi'\tau = 2\xi\tau + K_p K_c \tau_D$$

ou seja, $\xi' > \xi$. Logo, a resposta em malha fechada é mais amortecida e o amortecimento aumenta conforme K_c ou τ_D aumentam. Esta característica leva a um comportamento mais robusto do sistema controlado.

5.5- Efeito de ações de controle compostas

Embora o controle proporcional possa ser usado sozinho, este quase nunca é o caso para controle integral ou derivativo. Ao invés disso, os controladores proporcional integral (PI) e proporcional-integral-derivativo (PID) são os usualmente empregados.

5.5.1- Efeito do controle PI

a combinação dos modos de controle proporcional e integral levam aos seguintes efeitos na resposta em malha fechada de um sistema:

1- A ordem da resposta aumenta (efeito do modo integral)

2- O *offset* é eliminado (efeito da ação de controle integral)

3- conforme K_c aumenta, a resposta se torna mais rápida (efeito dos modos proporcional e integral) e mais oscilatória para mudanças de set-point (ou seja, o overshoot e a razão de declínio aumentam como efeito do modo integral). Valores muito grandes de K_c levam a respostas muito sensíveis, o que pode levar à instabilidade.

4- Conforme τ_1 aumenta, para K_c constante, a resposta se torna mais rápida, mas também mais oscilatória, com maiores *overshoots* e taxas de declínio (efeito do modo integral).

5.5.2- Efeito do controle PID

Combinação dos três modos de controle levam a resposta em malha fechada que tem em geral as mesmas características do controle PI. Vamos descrever então o maior benefício introduzido pela ação de controle derivativa.

Já vimos que a presença do controle integral torna a resposta em malha fechada mais lenta. Para aumentar a velocidade da resposta em malha fechada podemos aumentar o valor do ganho K_c . Mas aumentando K_c o suficiente para obtermos velocidades aceitáveis, a resposta se torna mais oscilatória e pode levar à instabilidade. a introdução do modo derivativo leva a um efeito estabilizante do sistema. Assim, podemos conseguir uma resposta aceitável selecionando um valor apropriado para o ganho K_c e ainda conseguindo manter *overshoots* e razões de declínio moderados.

A Figura 5.8 mostra o efeito do controlador PID na resposta de processos em malha fechada. Note que, embora K_c aumente levando a respostas mais rápidas, o *overshoot* permanece quase o mesmo e o tempo de assentamento é menor. Ambos são resultados da ação de controle derivativa.

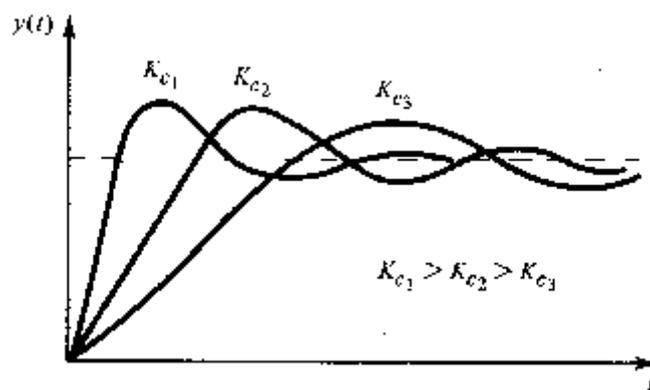


Figura 5.8- Efeito do ganho na resposta em malha fechada de um sistema de primeira ordem com controle PID.