

Suplemento 2

Usando o método LGR

2.1 Introdução

Neste suplemento se descreve passo a passo o procedimento de projeto de alguns controladores discretos. A ferramenta utilizada é o método do lugar geométrico das raízes (LGR). Os projetos apresentados buscam servir apenas como ilustração do método e não visam atingir desempenho ótimo (apesar de ser possível refinar os projetos para melhorar o desempenho atingido aqui).

A abordagem utilizada é a análise visual do diagrama LGR (Ogata) e a alocação manual dos parâmetros de projeto (tais como ganho do controlador, posição e número de polos e zeros).

A melhor ferramenta para se desenhar e manipular um diagrama LGR, assim como avaliar o desempenho obtido e outros aspectos é o pacote SISOTOOL (SisoTool), disponível no Control System Toolbox do Matlab e utilizada nos estudos de caso a seguir.

2.2 Estabilização de uma planta de terceira ordem

Seja a planta

$$G_p(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)}, \quad (2.1)$$

que é instável em malha aberta e relativamente difícil de estabilizar. Dois casos são considerados nos itens 2.2.1 e 2.2.2: estabilização sem preocupação com o erro de regime em malha fechada e estabilização com erro de regime nulo para entrada degrau. O objetivo é obter um compensador $G_c(z)$ discreto operando a 10Hz que faça com que a malha fechada satisfaça os requisitos.

A aproximação discreta da planta (2.1) a 10Hz é dada por

$$G_p(z) = \frac{0,00015118(z+3,387)(z+0,2418)}{(z-1,105)(z-0,8187)(z-0,7408)}. \quad (2.2)$$

2.2.1 Estabilização sem especificação de erro de regime

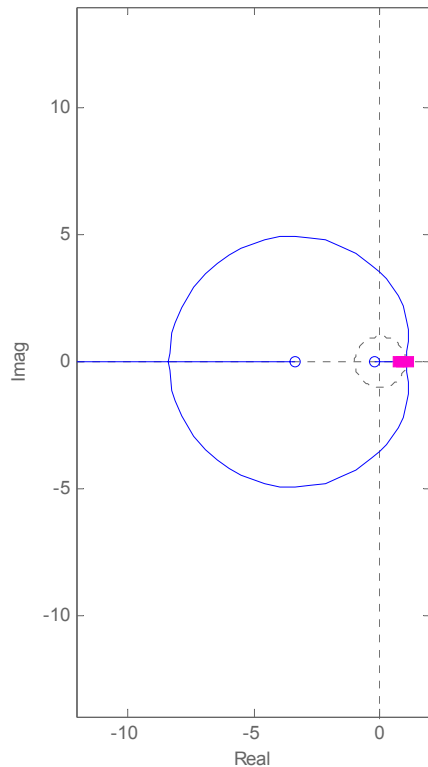
Note que a planta é do tipo 0, portanto não se pode esperar que o compensador proposto possua um ou mais polos na origem, a malha fechada apresentará erro de regime não nulo para entrada degrau.

PASSO 0

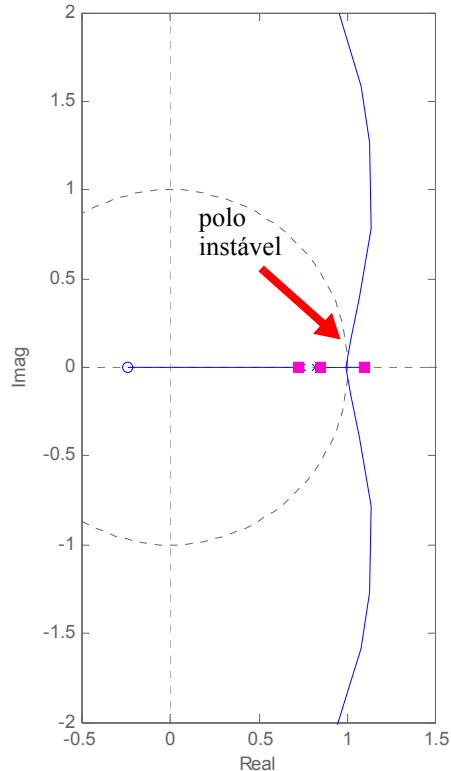
Inicialmente se utiliza um compensador de ganho unitário. Note que o compensador não é capaz de estabilizar a malha fechada.

LGR

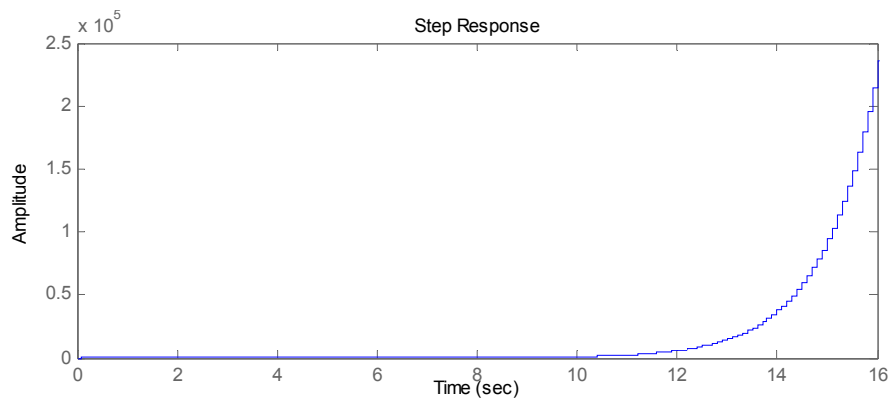
(vista geral)



(detalhe)



Degrau (malha fechada)



Compensador obtido

$$G_c(z) = 1$$

Avaliação e propostas

O compensador proporcional de ganho unitário não é capaz de estabilizar o sistema. Como há dois ramos do diagrama LGR que se afastam da região de estabilidade, aumentar o ganho não resolverá o problema. Vamos considerar as seguintes propostas.

(A) Utilizar um zero para cancelar o polo da planta em $z = 0,8187$ para deslocar o LGR para a esquerda;

(B) Utilizar um par de zeros complexos próximos à origem para atrair os ramos para a região de estabilidade.

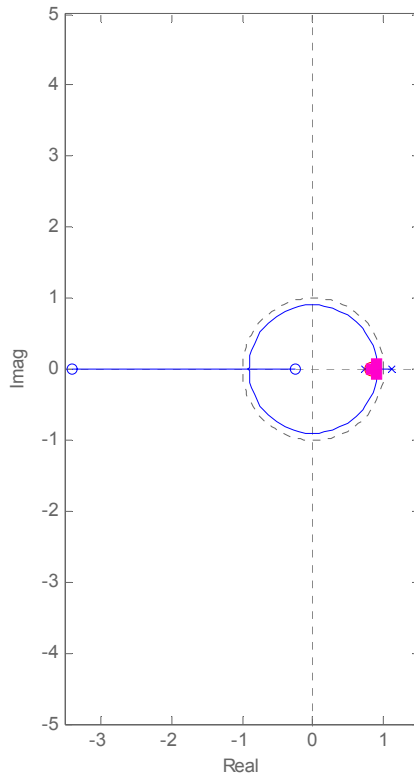
(ambas as propostas vão requerer um ajuste de ganho para estabilização e ajuste de desempenho)

PASSO A1

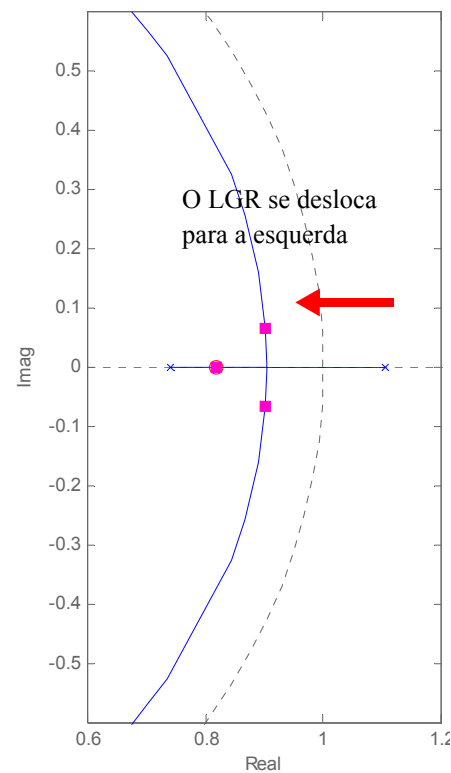
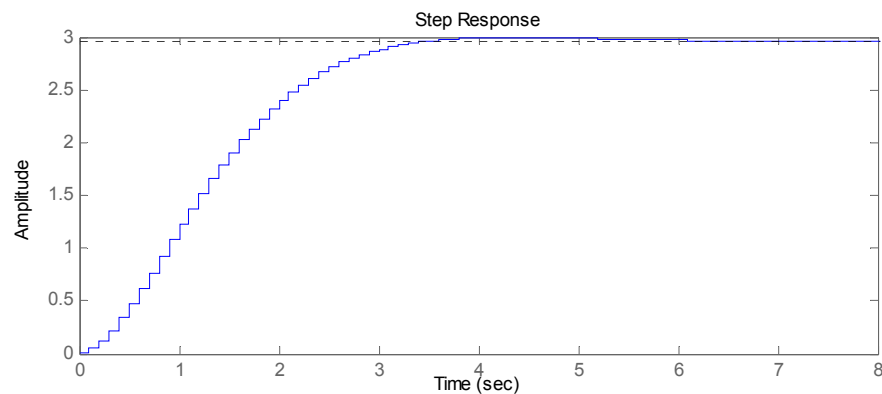
O polo da planta em $z = 0,8187$ é cancelado e o ganho do compensador é ajustado manualmente para o valor 50.

LGR

(vista geral)



(detalhe)

**Degrau (malha fechada)****Compensador obtido**

$$G_c(z) = 50(z - 0,8187) \text{ (impróprio)}$$

Avaliação e propostas

O compensador estabiliza a planta. A resposta a degrau apresenta um sobressinal muito pequeno, mas é relativamente lenta. O erro de regime é da ordem de 200%. Um problema óbvio com o compensador é que ele é não causal. Para resolver esse problema vamos estudar as seguintes propostas.

(a) Incluir um polo não oscilatório (portanto real entre 0 e 1) de alta frequência (portanto próximo à origem) para não interferir muito no resultado já obtido. Com isso o compensador se tornará bipróprio.

(b) Incluir um par de polos complexos conjugados próximos à origem para tornar o compensador bipróprio.

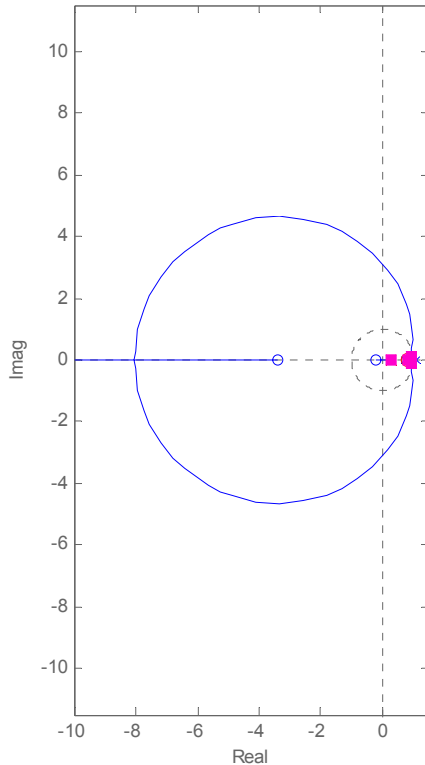
(ambas as propostas vão requerer um ajuste de ganho para estabilização e ajuste de desempenho)

PASSO Aa2

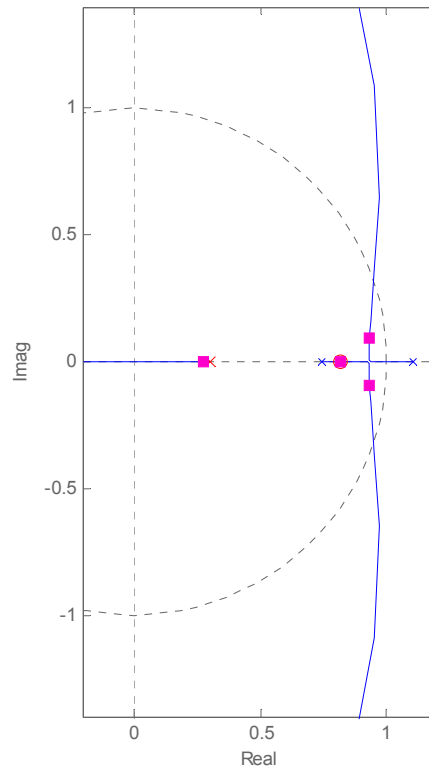
Um polo é introduzido no compensador em $z = 0,3$ e o ganho do compensador é ajustado manualmente para o valor 35.

LGR

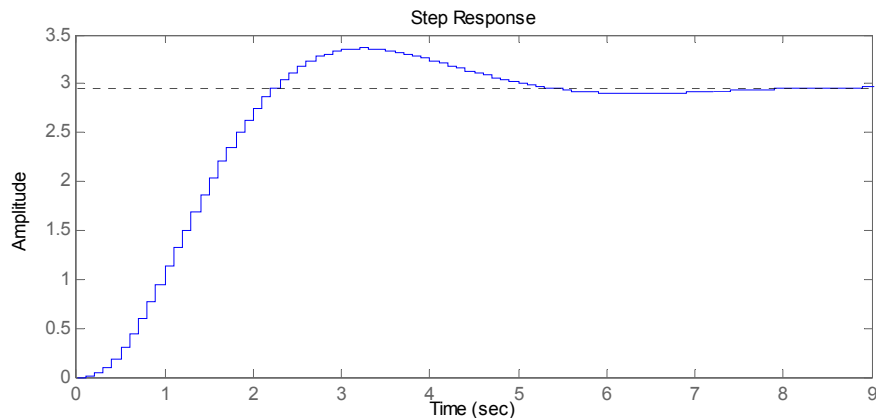
(vista geral)



(detalhe)



Degrau (malha fechada)



Compensador obtido

$$G_c(z) = 35 \frac{(z - 0,8187)}{(z - 0,3)} \text{ (bipróprio)}$$

Conclusão

O compensador, que agora é bipróprio, estabiliza a planta. O sobressinal ainda é pequeno, e a resposta é um pouco mais rápida. O erro de regime continua da ordem de 200%.

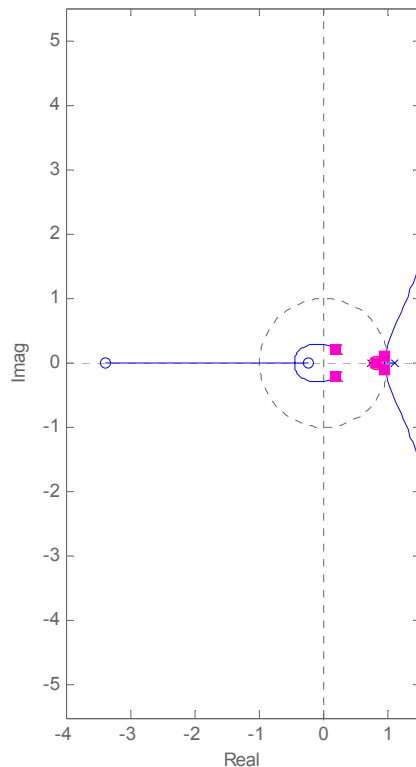
Para melhorar o desempenho do sistema poderia se tentar uma alocação diferente para o polo e um melhor ajuste de ganho (isso porém não eliminará o erro de regime).

PASSO Ab2

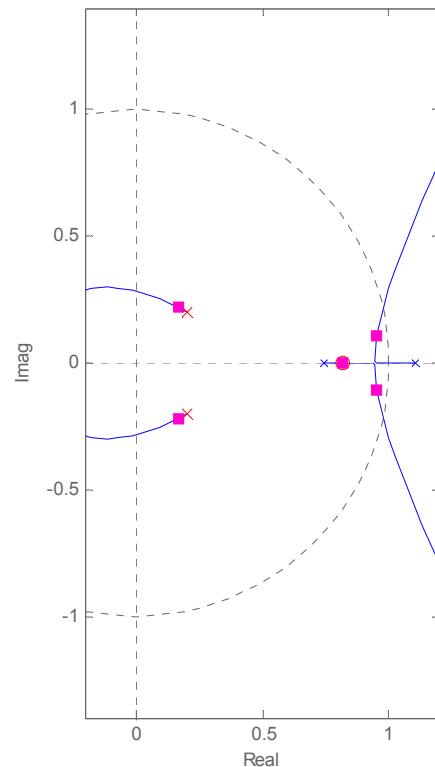
Um par de polos é introduzido no compensador em $z = 0,2 \pm j0,2$ e o ganho do compensador é ajustado para o valor 35 (o mesmo do caso anterior por coincidência). Um ganho menor diminuiria o sobressinal, mas aumentaria o erro de regime, ao passo que um ganho maior diminuiria o erro de regime, mas aumentaria a oscilação da resposta (podendo até instabilizar o sistema).

LGR

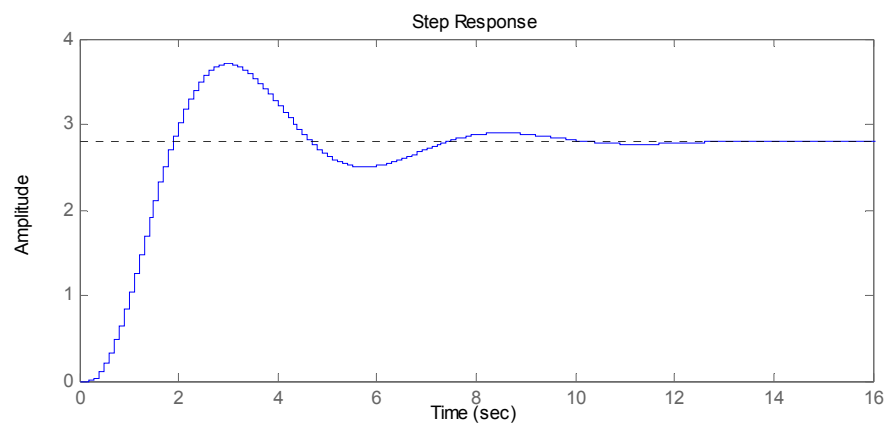
(vista geral)



(detalhe)



Degrau (malha fechada)



Compensador obtido

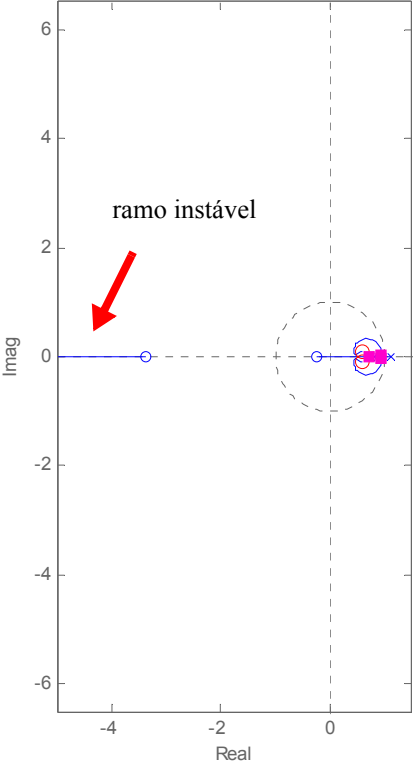
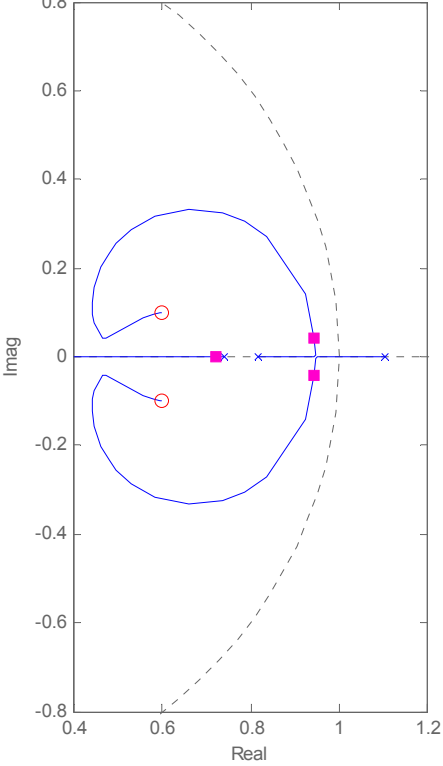
$$G_c(z) = 35 \frac{(z - 0,8187)}{(z^2 - 0,4z + 0,08)} \text{ (estr. próprio)}$$

Conclusão

O compensador, que agora é estritamente próprio, estabiliza a planta. O sobressinal é maior, e a resposta é mais rápida. O erro de regime continua da ordem de 200%. Note que os polos dominantes de malha fechada estão no limite da estabilidade, de modo que não se pode aumentar muito o ganho. Para melhorar o desempenho teria que ser tentada uma alocação diferente do par de polos.

PASSO B1

Um par de zeros é alocado em $z = 0,6 \pm j0,1$. Este passo ainda não conduz a uma situação válida. O compensador é impróprio e, apesar dos ramos desejados terem sido atraídos para a região de estabilidade há ainda um ramo totalmente instável (à esquerda do LGR).

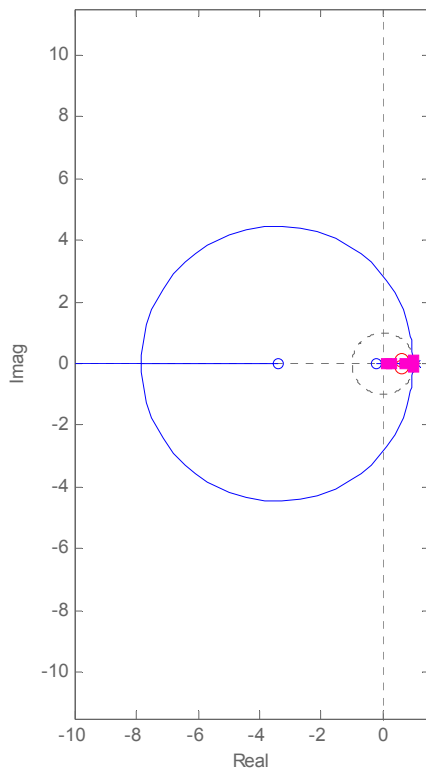
LGR	
(vista geral)	(detalhe)
	
Degrau (malha fechada)	
(instável demais para a produção de qualquer visualização)	
Compensador obtido	$G_c(z) = 45(z^2 - 1,2z + 0,37)$ (impróprio)
Avaliação e propostas	
É necessário incluir polos para tornar o compensador próprio. Um par de polos é suficiente para torná-lo bipróprio.	

PASSO B2

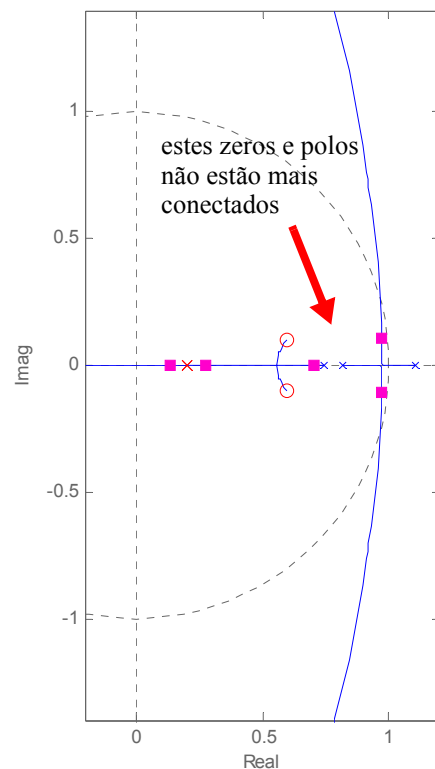
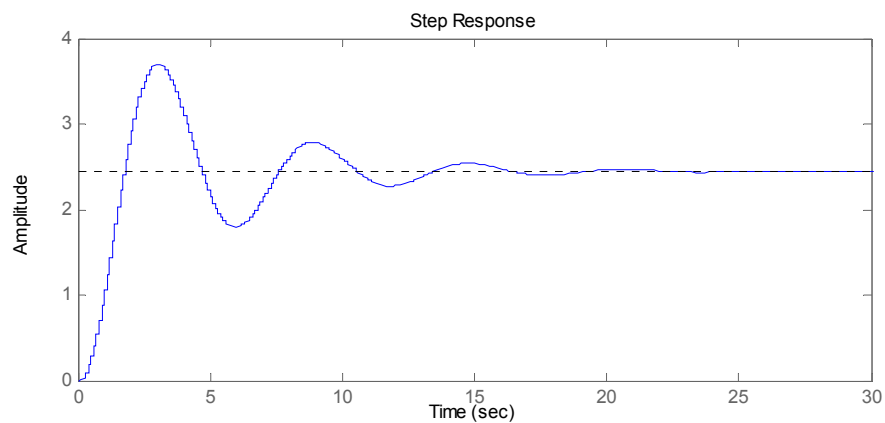
Um polo duplo é alocado em $z = 0,2$. Com isso o compensador passa a ser próprio.

LGR

(vista geral)



(detalhe)

**Degrau (malha fechada)**

Compensador obtido

$$G_c(z) = 38 \frac{(z^2 - 1,2z + 0,37)}{(z - 0,2)^2} \text{ (bipróprio)}$$

Avaliação e propostas

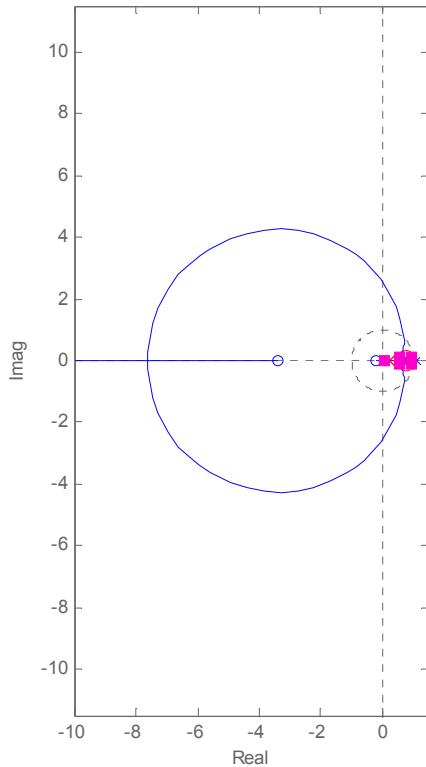
Os ramos que inicialmente se desejava atrair com o par de zeros acabaram se desconectando deles. Realocar os zeros deve fazer com que eles se reconectem (os ramos atualmente conectados se dirigirão ao infinito).

PASSO B3

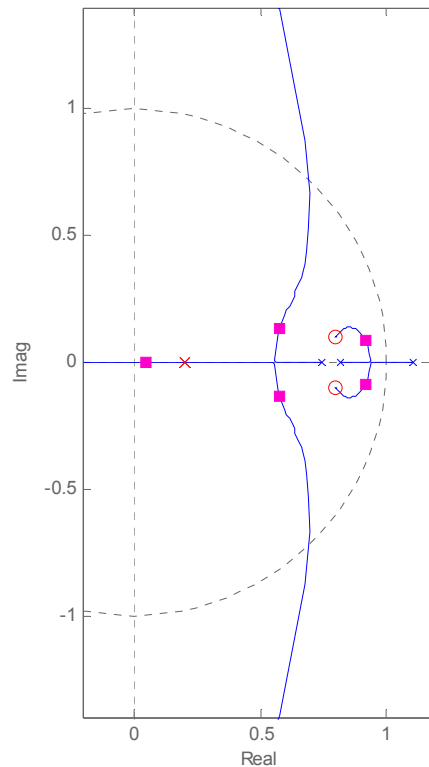
O par de zeros foi realocado para $z = 0,8 \pm j0,1$ e os ramos reconectados. O ganho foi aumentado para o valor 140.

LGR

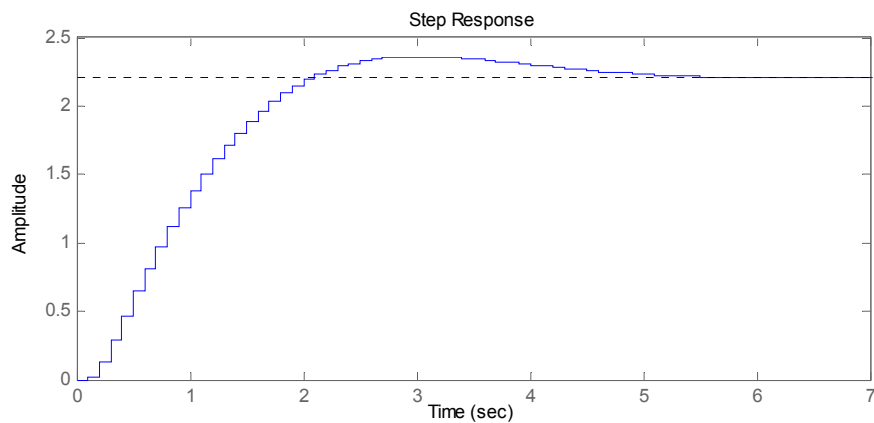
(vista geral)



(detalhe)



Degrau (malha fechada)



Compensador obtido

$$G_c(z) = 38 \frac{(z^2 - 1,6z + 0,65)}{(z - 0,2)^2} \text{ (bipróprio)}$$

Conclusão

Os zeros foram realocados e o diagrama LGR adquiriu margens de ganho bem maiores. Como o ganho ajustado aumentou bastante, foi possível reduzir o erro de regime para patamares bem menores (por volta de 100%) com um sobressinal baixo. Pode-se melhorar o desempenho aumentando o ganho sem preocupação com perda de estabilidade. A capacidade do atuador (não especificada aqui) passaria a ser o fator limitante - ganhos altos tendem a gerar saturação em atuadores.

A Figura 2.1 abaixo resume a sequência de projeto adotada e as alternativas exploradas.

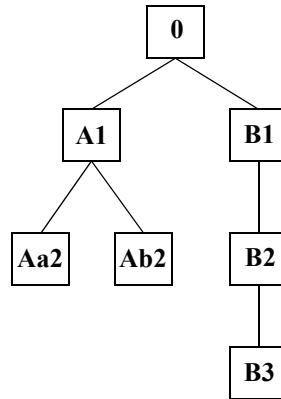


Figura 2.1 Sequência de projeto para o item 2.2.1

2.2.2 Estabilização com erro de regime nulo

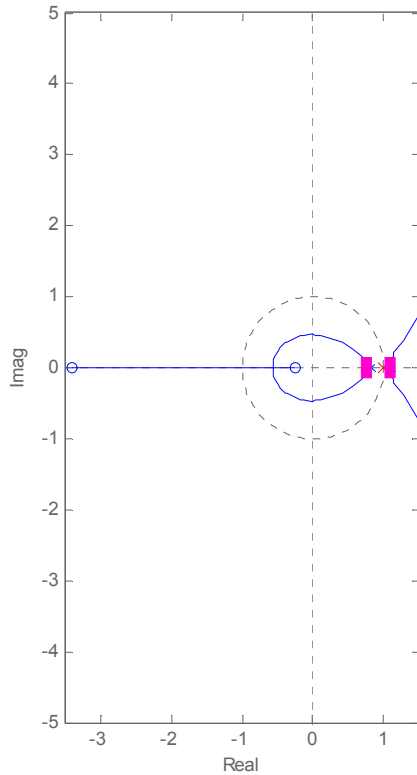
Para se obter erro de regime nulo para entrada degrau, é necessário incluir um integrador no compensador. Para sistemas discretos isso se resume à inclusão de um termo $(z - 1)$ no denominador da função de transferência do compensador. Obviamente, a simples inclusão do integrador não garante nem a estabilidade nem o desempenho do sistema em malha fechada, como pode ser visto no Passo 0 da sequência de projeto a seguir.

PASSO 0

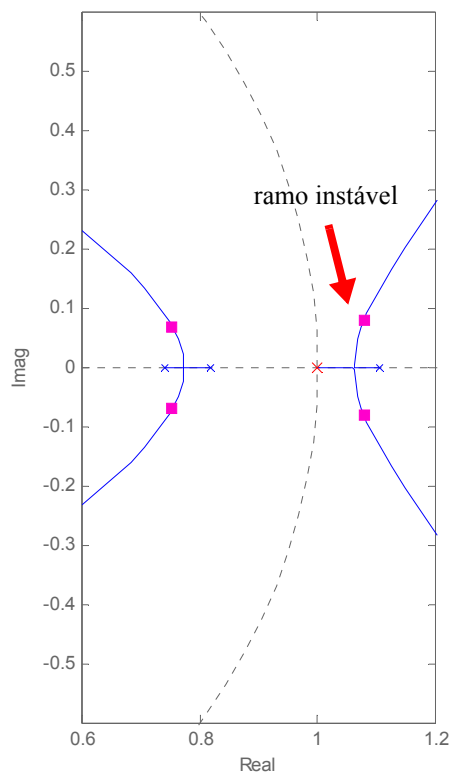
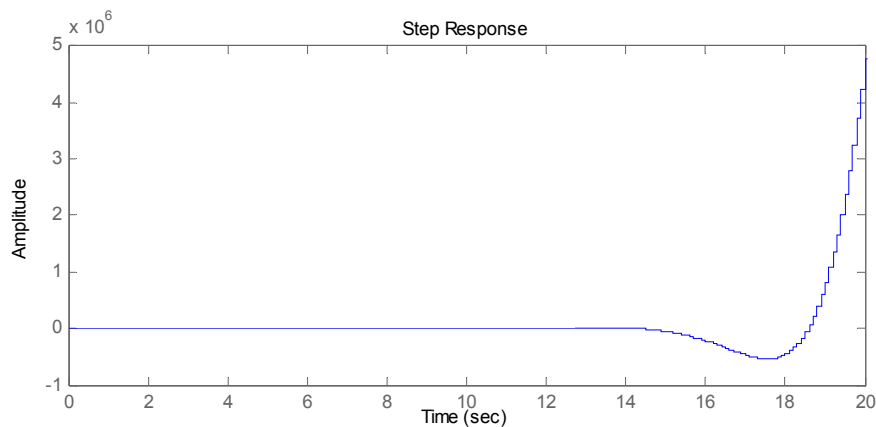
Inicialmente se utiliza um compensador de ganho unitário. Note que o compensador não é capaz de estabilizar a malha fechada (qualquer que seja o ganho adotado).

LGR

(vista geral)



(detalhe)

**Degrau (malha fechada)****Compensador obtido**

$$G_c(z) = \frac{1}{z-1}$$

Avaliação e propostas

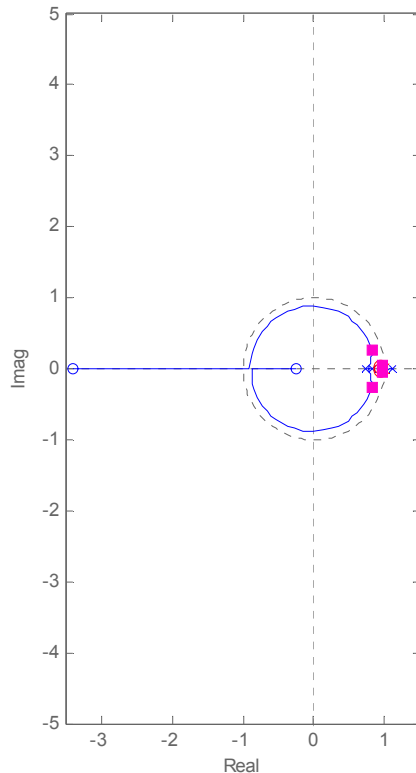
O compensador proporcional de ganho unitário não é capaz de estabilizar o sistema. Como há dois ramos do diagrama LGR integralmente fora da região de estabilidade, não adianta alterar o ganho. Incluir um par de zeros à direita da região de estabilidade deve atrair o ramo instável para a região de estabilidade.

PASSO 1

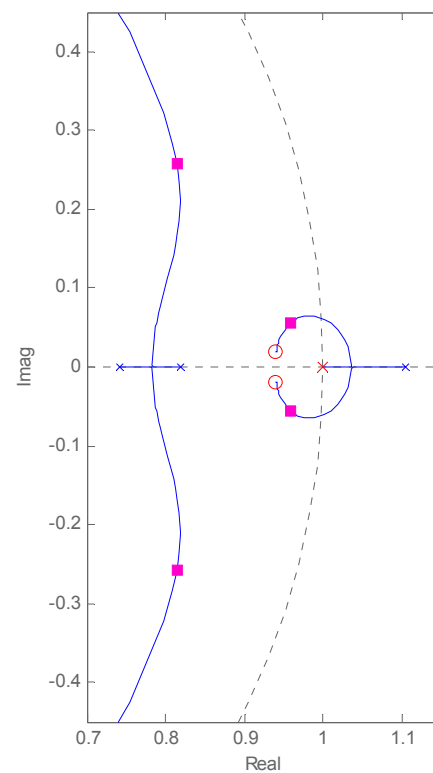
Um par de zeros em $0,94 \pm j0,02$ foi alocado manualmente para atrair os ramos instáveis para o círculo unitário. Com isso o sistema fica condicionalmente estável e o ganho foi ajustado manualmente para o valor 150 para estabilizar o sistema.

LGR

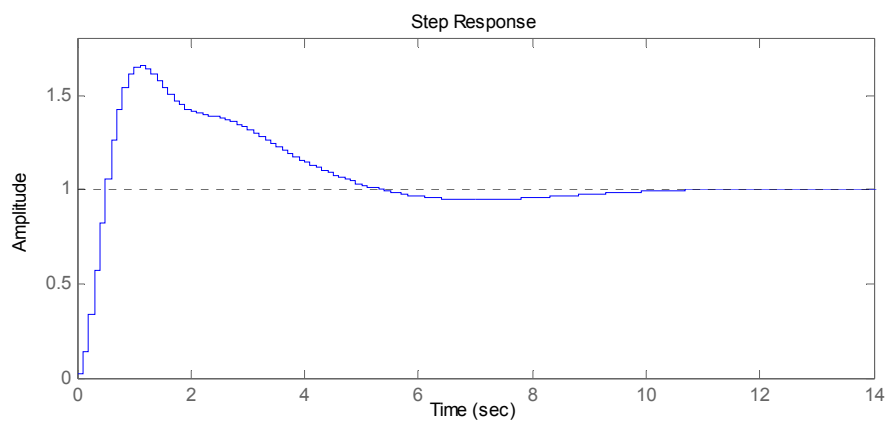
(vista geral)



(detalhe)



Degrau (malha fechada)



Compensador obtido

$$G_c(z) = 150 \frac{(z^2 - 1,88z + 0,884)}{(z - 1)} \text{ (impróprio)}$$

Avaliação e propostas

O compensador proposto foi capaz de atrair os ramos instáveis para o círculo unitário e, com um ajuste adequado de ganho, estabilizar a planta com erro ao degrau nulo. Porém, o compensador é impróprio e portanto sua implementação é inviável.

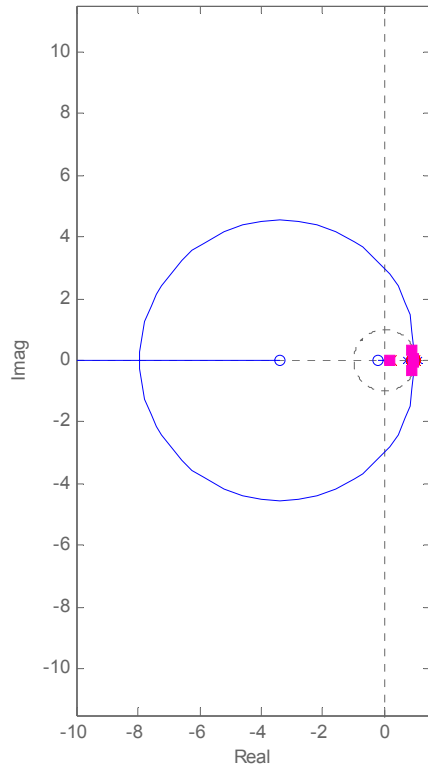
Incluir um pólo estável de alta frequência (portanto próximo à origem) no compensador deve resolver o problema de causalidade e causar pouca interferência no resultado obtido.

PASSO 2

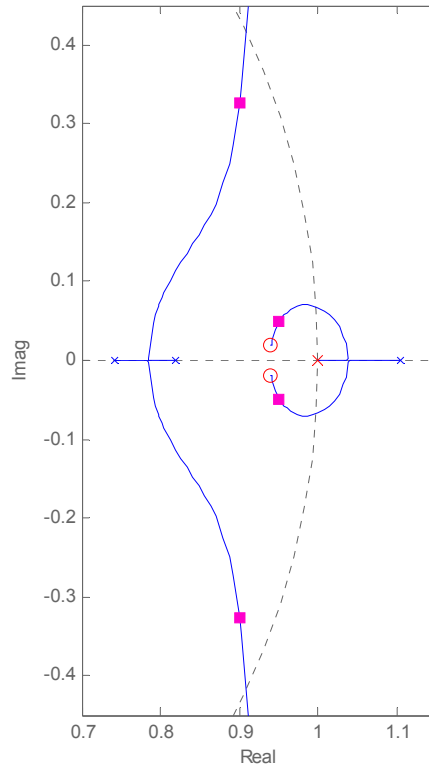
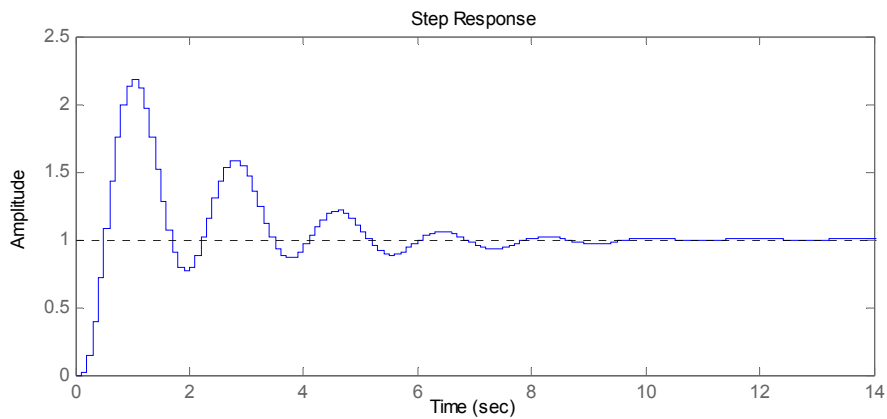
Um polo foi alocado em $z = 0,2$ e com isso o compensador torna-se bipróprio. O ganho foi mantido em 150.

LGR

(vista geral)



(detalhe)

**Degrau (malha fechada)****Compensador obtido**

$$G_c(z) = 150 \frac{(z^2 - 1,88z + 0,884)}{(z - 1)(z - 0,2)} \text{ (bipróprio)}$$

Conclusão

O compensador é causal. A inclusão do novo polo ocasionou um aumento da oscilação. Dada a configuração do LGR, um aumento no ganho não seria efetivo para diminuir o sobressinal.

2.3 Atividades

Utilize o pacote SISOTOOL e tente obter controladores mais efetivos para a planta (2.1) do que os apresentados aqui.

2.4 Referências

(Ogata) Ogata, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Pearson Prentice-Hall, 4a. ed., 2003.

Edições anteriores também servem.

(SisoTool) Ajuda on-line do pacote SisoTool.

Disponível na documentação online do Matlab.

RPM/2010a

