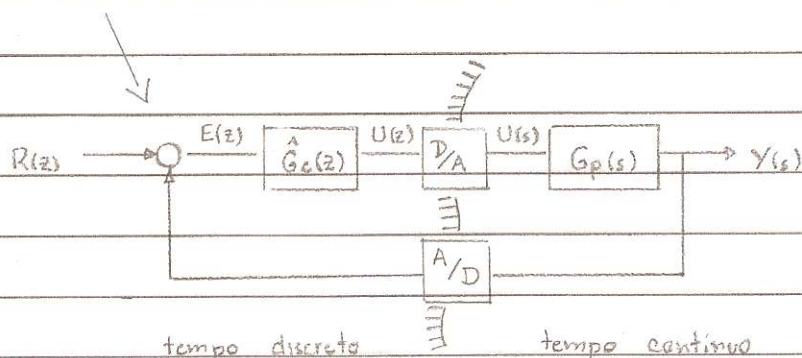
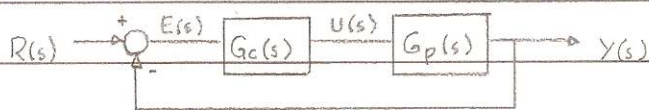


3. Aproximações discretas

A ideia geral desta abordagem é projetar controladores analógicos (como em Controle I) e implementá-los em computador.

Para isso é necessário obter equivalentes discretas de controladores analógicos.



O comportamento do equivalente discreto deve corresponder ao do sistema contínuo em aspectos relevantes tais como resposta em frequência, resposta ao impulso ou ao degrau, manter a ordem do sistema, o número de polos ou zeros, e principalmente estabilidade ($G_c(z)$ estável $\rightarrow \hat{G}_c(z)$ estável).

Vantagens dessa abordagem:

- Técnicas contínuas consolidadas (histórico de mais de 50 anos)
- Controladores contínuos consagrados em diversas aplicações (e.g. PID)
- Controle contínuo é tão mais intuitivo
- O projeto não depende da frequência de amostragem (porém a aproximação discreta dependerá)

Desvantagem:

- Potencialmente um projeto discreto pode ser mais simples, melhor e flexível.

3.1 Aproximações por integração numérica

Ideia geral: Converter $G_c(s)$ em uma equação diferencial e obter uma aproximação numérica para a solução.

Vamos considerar um caso simples:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \quad \text{equivalente a} \quad \dot{U}(t) = e(t)$$

que tem como solução: $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$ p/qualquer t_0, t

escolhendo t_0 e t adequadamente: $u((k+1)T) = u(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau$

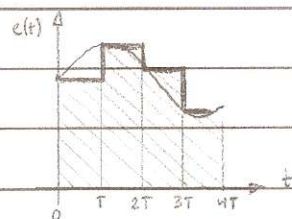
e fazendo aproximações a partir deste ponto.

3.1.1 Retangular para frente (Euler's Forward Method)

É a mais simples aproximação.

$$\hat{U}((k+1)T) = \hat{U}(kT) + T e(kT)$$

$$\Leftrightarrow z \hat{U}(z) = \hat{U}(z) + T E(z)$$

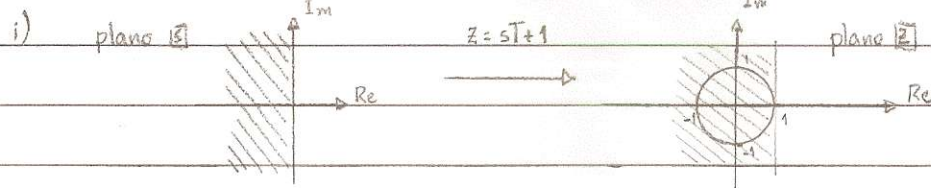


portanto: $\hat{G}_c(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{T}{z-1}$

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{T}$$

$$\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

Observações



Sistemas contínuos estáveis podem levar a equivalentes instáveis

Melhor não usar este método

ii) Outra modo de entender a aproximação

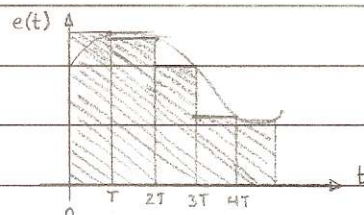
$$z \triangleq e^{sT} = 1 + sT + \frac{s^2 T^2}{2!} + \frac{s^3 T^3}{3!} + \dots \approx 1 + sT \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T}$$

AULA 9
2009

3.1.2 Retangular para trás (Euler's backward method)

$$\hat{u}((k+1)T) = \hat{u}(kT) + T \cdot e((k+1)T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \hat{U}(z) = \hat{U}(z) + z T E(z)$$

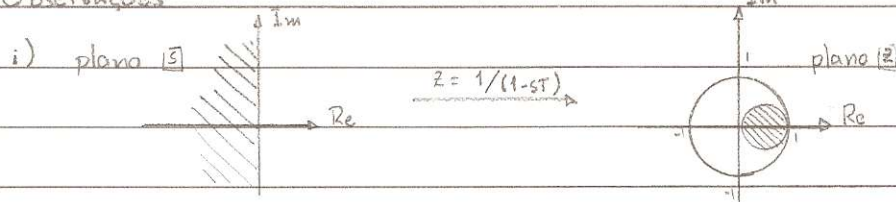


portanto: $\hat{G}_c(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{Tz}{z-1}$

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{Tz}$$

$$\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{Tz}}$$

Observações



Estabilidade preservada, mas o mapeamento é restrito

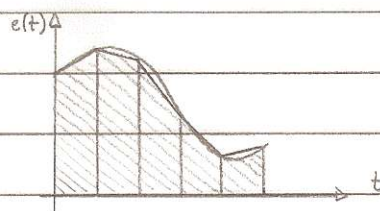
ii) outro modo de entender

$$z \triangleq e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \approx \frac{1}{1-sT} \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{zT}$$

3.1.3 Trapezoidal (aproximação bilinear ou método de Tustin)

$$\hat{u}((k+1)T) = \hat{u}(kT) + \frac{T}{2} \{e(kT) + e((k+1)T)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \hat{U}(z) = \hat{U}(z) + \frac{T}{2} (z+1) E(z)$$



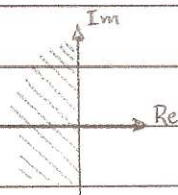
portanto: $\hat{G}_C(z) = \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)}$

$$s \leftrightarrow \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)}$$

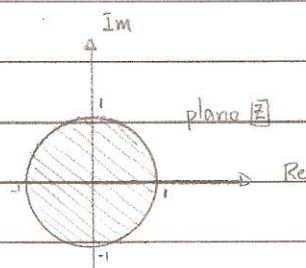
$$\hat{G}_C(z) = G_C(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)}}$$

Observações:

1) plano $\{s\}$



$$z = \frac{2+sT}{2-sT}$$



Estabilidade preservada: $G_C(s)$ estável $\Leftrightarrow \hat{G}_C(z)$ estável

ii) outro modo de entender

$$z \triangleq e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \Rightarrow s \approx \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)}$$

iii) O método mapeia todo o eixo imaginário de $\{s\}$, $s=j\omega$, na primeira volta do círculo unitário em $\{z\}$, portanto há uma distorção em relação ao mapeamento $e^{j\omega T}$ tanto maior quanto maior for ω

Há uma variação do método que compensa essa distorção, que não veremos.

3.2. Aproximações por derivação numérica

Vamos considerar $G_c(s) = U(s) = s$ (derivador)
 $E(s)$

equivalente a $u(t) = \dot{e}(t)$

$$u(t) = \dot{e}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e(t) - e(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\hat{u}(kT) \approx \frac{e((k+1)T) - e(kT)}{T} \approx \frac{e(kT) - e((k-1)T)}{T}$$

$$\text{Portanto } \hat{U}(z) = \frac{zE(z) - E(z)}{T} \Rightarrow \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{T}$$

ou seja $\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$ (equivalente a retangular para frente)
 -diferença finita para frente -

$$\text{Ou } \hat{U}(z) = \frac{E(z) - z^{-1}E(z)}{T} \Rightarrow \frac{\hat{U}(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{Tz}$$

ou seja $\hat{G}_c(z) = G_c(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{Tz}}$ (equivalente a retangular para trás)
 -diferença finita para trás -

Outras aproximações de ordem superior poderiam ser utilizadas para a derivada, resultando em novos mapeamentos (não veremos aqui)

3.3 Casamento pólo-zero

Ideia geral: Tentar uma aproximação simples explorando a definição do mapeamento ideal de polos $z \triangleq e^{sT}$ e entradas impulsivas

Observe que: $Z \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{z}{(z - e^{-aT})}$

No denominador (onde ficam os polos)

substituímos a por $-e^{-aT}$

- fácil -

No numerador (onde ficam os zeros)

infelizmente é mais complicado

A ideia do método é utilizar o mesmo procedimento fácil nos polos (que é o ideal) também nos zeros (o que é uma aproximação).

Essa aproximação afeta o numerador, principalmente, embaralhando o ganho do sistema.

Regras:

1) Mapear os polos segundo $z = e^{sT}$

polos reais: $(s+a) \rightarrow (z - e^{-aT})$

polos complexos: $(s+\alpha-j\omega) \rightarrow (z - e^{-\alpha T} \cdot e^{j\omega T})$

(lembrar que polos complexos vêm em pares)

Obs: polos no infinito ou fora da faixa primária, mapear em $z = -1$
(bloqueamos o mapeamento na primeira volta)

IMPORTANTE: Isso jamais deve ser necessário:

polo no infinito \rightarrow sistema impróprio

polo acima da freq. Nyquist \rightarrow T inadequada para aproximação

2) Mapear os zeros segundo $z = e^{sT}$

zeros finitos

reais: $(s+a) \rightarrow (z - e^{-aT})$

complexos: $(s+\alpha-j\omega) \rightarrow (z - e^{-\alpha T} \cdot e^{j\omega T})$

(também vêm em pares)

zeros infinitos (podem ocorrer!)

mapear em $z = -1$; isto é, inclui-se um termo $(z+1)$ para cada zero no infinito.

zeros fora da faixa primária (não podem ocorrer!)

mapear em $z = -1$; essa situação indica que T foi mal escolhido.

OBS: Quem são os zeros no infinito?

Num sistema próprio há

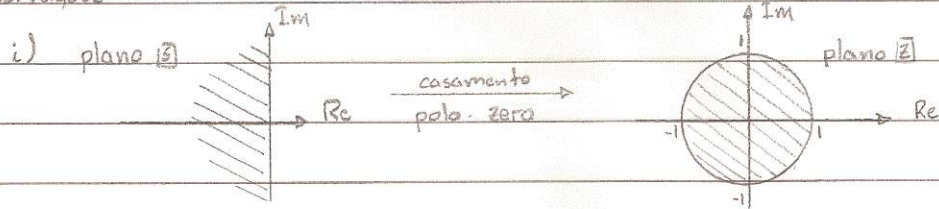
grau(denominador) - grau(numerador)

zeros no infinito (o termo vem do LGR)

3) Ajustar o ganho para algum ponto crítico. Em aplicações de controle tipicamente o ganho é ajustado para baixas frequências, isto é

$$G_c(s) \Big|_{s=0} = \hat{G}_c(z) \Big|_{z=1}$$

Observações



$$G_c(s) \text{ estável} \leftrightarrow \hat{G}_c(z) \text{ estável}$$

ii) O método mapeia a faixa primária no círculo de raio unitário e o restante do semi-plano esquerdo em $z = -1$
- isso é um bom mapeamento -

iii) O que eu faço se meus polos/zeros estão fora da faixa primária?
- Desprezê-los ou aumentar a frequência de amostragem.

iv) Para atrasar a resposta do sistema discreto em um período de amostragem, basta mapear um dos zeros no infinito em $z = \infty$ (isto é, retirar um dos termos $(z+1)$)
Útil para obter aproximações discretas estritamente próprias.
Esse procedimento causa perdas na qualidade das aproximações.

Exemplo:

Equivalente discreto de $G_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ para $T = 0,1s$

Temos
$$\hat{G}_c(z) = \frac{(z+1)^2 \cdot K}{(z - e^{-0,1}) (z - e^{-0,2})} = \frac{(z+1)^2 K}{(z - 0,9048) (z - 0,8187)}$$

Cálculo do ganho:
$$\left. \frac{(z+1)^2 \cdot K}{(z - 0,9048) (z - 0,8187)} \right|_{z=1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \bigg|_{s=0} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 0,0021563$$

Portanto $\hat{G}_c(z) = \frac{0,0021563 (z+1)^2}{(z-0,9048)(z-0,8187)}$

Ou então $\hat{G}_c'(z) = \frac{(z+1)k'}{(z-e^{-\alpha T})(z-e^{-\alpha' T})}$

resultando em

$\hat{G}_c'(z) = \frac{0,0043125 (z+1)}{(z-0,9048)(z-0,8187)}$ (que é estritamente próprio)

Exemplo:

$G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ com $\xi = 0.3$ e $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$

Comparação das aproximações:

Ver approx.m

OBS: Definição de diagrama de Bode para sistemas discretos

Em tempo contínuo usamos $s = j\omega$

Em tempo discreto usamos $z = e^{j\omega T}$ (pela def. $z \stackrel{\Delta}{=} e^{sT}$)

3.4 Observações sobre a utilização dos métodos

Aumento de f

Via de regra, com o aumento de f, todos os métodos produzem aproximações mais próximas entre si e mais próximas do sistema contínuo original (porém não se pode aumentar f impunemente)

Estabilidade

Somente se deve utilizar aproximações que mapeiem sistemas contínuos estáveis em sistemas discretos estáveis. (isso exclui retangular para frente)

Forma do mapeamento

Se os requisitos de frequência de amostragem forem apertados (i.e. pouca folga entre a banda do sistema e a frequência de Nyquist) deve-se dar preferência a mapeamentos com pouca distorção em relação a $z = e^{sT}$ (melhores: Tustin e cas. PZ)

Grav da FT

Com Tustin e Cas. PZ, as funções de transferência em z são bipróprias ($\text{grau}(\text{num}) = \text{grau}(\text{den})$), mesmo que não fossem assim no plano $[s]$. Se isso for um problema, usar a versão estritamente própria do cas. PZ

AULA 11
2008

3.5 Aspectos numéricos das implementações em $[z]$

OBS: Isso vale para todos os métodos e também sistemas originalmente discretos

Contração do mapeamento de $[s]$ em $[z]$

Distâncias iguais no semi-plano esquerdo de $[s]$ são mapeados em distâncias cada vez menores no plano $[z]$ à medida que se afastam da origem

Considere um ponto no plano $[s]$, $s_0 = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ para $\omega_n \geq 0$ e $\xi \geq 0$

Não por acaso, os polos de $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ são $\{s_0, s_0^*\}$

ξ : coeficiente de amortecimento

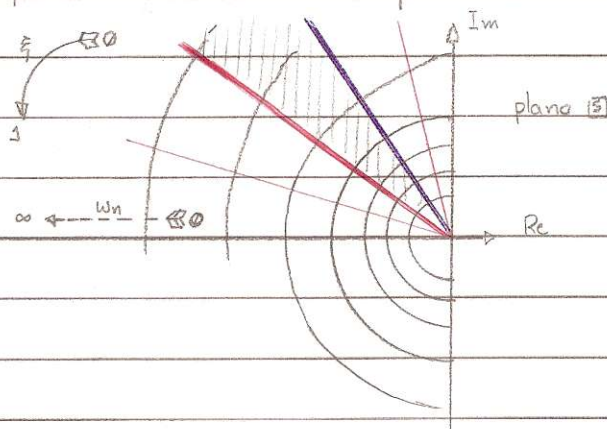
Se $0 < \xi < 1$, $G_c(s)$ tem comportamento oscilatório

(indica quão rapidamente as oscilações se anulam)

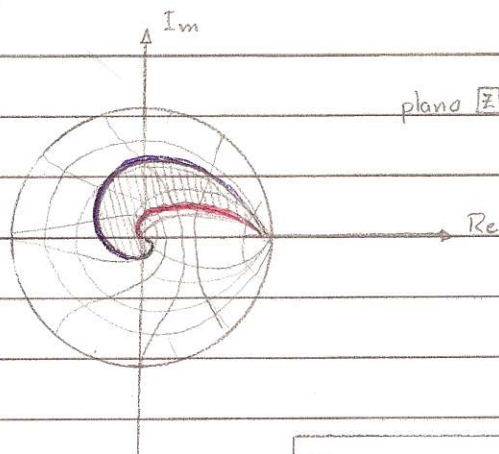
ω_n : frequência natural de amortecimento

(indica a frequência de oscilação e o tempo de resposta do sistema)

Mapeando o plano $[s]$ em termos de ξ e ω_n



No plano $[z]$, com $z = e^{sT}$



Ver mapxw.m

Conclusão: Parâmetros ξ, ω_n que indicam o comportamento do sistema, variam conformemente no plano $[s]$, mas são "espremidos" no plano $[z]$.

AULA 11
2009

O mapeamento em função de T

Consideremos o polo $s_0 = -\omega_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$ (podem ser qualquer s_0)
que é mapeado em $z_0 = e^{s_0 T}$

Quando $T \rightarrow 0$, $z_0 \rightarrow 1$; qualquer que seja s_0 .

Quando $T \rightarrow \infty$, $z_0 \rightarrow 0$, qualquer que seja s_0 no semi-plano esquerdo.

Conclusão: Aumentar a frequência de amostragem "espreme" o mapeamento em direção a $1 + j\cdot 0$.

Exemplo: Seja o sistema $G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$; com $\xi = 0,6$ e $\omega_n = 2$

Ver [mappole.m](#)

Problemas numéricos com aumento da frequência de amostragem

Novamente: isso vale para qualquer método e também sistemas originalmente discretos

Exemplo:

Vamos considerar o método da cas. PZ.

Seja o sistema $G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ com $\xi = 0,3$ e $\omega_n = 2$

Para $f = 1 \text{ Hz}$ (muito baixa): $G_c(z) = \frac{0,416054 (z+1)^2}{z^2 + 0,363022 z + 0,301194}$

Para $f = 10 \text{ Hz}$ (melhor): $G_c(z) = \frac{0,009391 (z+1)^2}{z^2 - 1,849352 z + 0,866920}$

Para $f = 100 \text{ Hz}$ (boa): $G_c(z) = \frac{0,000099 (z+1)^2}{z^2 - 1,987674 z + 0,988071}$

Para $f = 1 \text{ kHz}$ (mais do que necessário): $G_c(z) = \frac{0,000001 (z+1)^2}{z^2 - 1,998797z + 0,998801}$

Para $f = 100 \text{ kHz}$ (perigoso) $G_c(z) = \frac{0,000000 (z+1)^2}{z^2 - 1,999989z + 0,999988}$
($k = 9,999940 \cdot 10^{-11}$)

Para $f = 1 \text{ MHz}$ (muito perigoso) $G_c(z) = \frac{0,000000 (z+1)^2}{z^2 - 1,999999z + 0,999999}$
($k = 9,9999 \cdot 10^{-13}$)

Como o sistema tem a seguinte estrutura

$$G_c(z) = \frac{k(z^2 + 2z + 1)}{z^2 + \alpha z + \beta} \Rightarrow U(z) = \frac{k + 2kz^{-1} + kz^{-2}}{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(z) = kE(z) + 2kz^{-1}E(z) + kz^{-2}E(z) - \alpha z^{-1}U(z) - \beta z^{-2}U(z)$$

ou seja $u(k) = k \cdot e(k) + 2k \cdot e(k-1) + k \cdot e(k-2) - \alpha u(k-1) - \beta u(k-2)$

Para entrada degrau e $k \geq 2$:

$$u(k) = 4k - \alpha u(k-1) - \beta u(k-2)$$

com $u(0) = k$

$$u(1) = (3-\alpha)k$$

Ver precz.m

Conclusão: * Aumento de f requer maior precisão:

- nos parâmetros

- nas contas

* f elevada pode inviabilizar virtualmente qualquer implementação

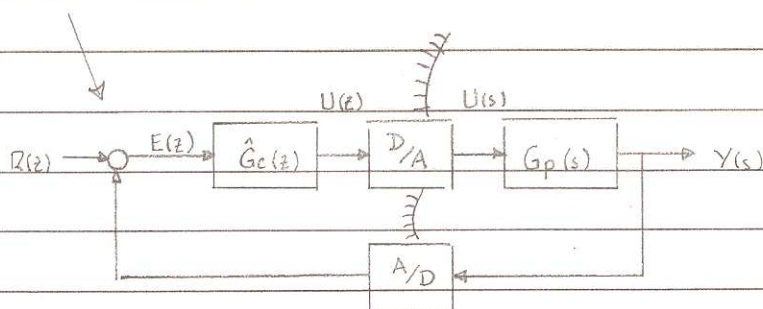
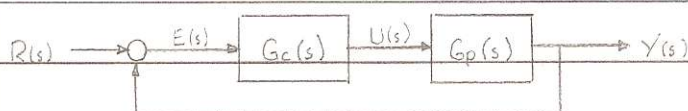
OBS: * O caráter iterativo da solução das equações de diferenças agrava a propagação de erros numéricos.

* Fechar a malha tende a agravar o problema ainda mais

AULA 12
2008

3.6 O efeito do ZOH na saída do controlador

Recapitulando:

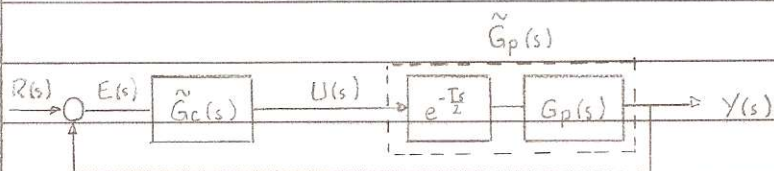


tempo discreto

tempo contínuo

Porém, como vimos em 2.3, o conversor DA com ZOH, distorce o sinal em relação à versão contínua. Essa distorção é parecida com um atraso de $T/2$.

Teríamos então



Idéia geral: Em vez de projetar um controlador $G_c(s)$ para controlar a planta $G_p(s)$, devemos projetar um controlador $\tilde{G}_c(s)$ para controlar a planta $\tilde{G}_p(s)$. Ao discretizarmos $\tilde{G}_c(s)$, o equivalente discreto $\hat{G}_c(s)$ terá um comportamento mais parecido com $G_c(s)$ do que se tivéssemos discretizado o próprio $G_c(s)$.

AULA 12
2009

É necessário ?

- Segundo FPW, se a frequência de amostragem for maior que 30 vezes a banda passante do sistema em malha fechada (ou da malha aberta - o que for maior), pode-se desprezar o efeito do ZOH.
- Para frequências mais baixas - faz diferença no resultado final.

Vantagem

- * Permite diminuir bastante a freq. amostragem, sem perda de desempenho.

Desvantagens

- * Complica o projeto
- * Como o atraso depende da freq. amostragem, o projeto passa a depender também da frequência escolhida.

3.1 Aproximações para o atraso

Usualmente fazemos aproximações racionais para $e^{-sT/2}$

a) Aproximação de Padé de 1º ordem

$$e^{-sT/2} \approx \frac{1 - sT/4}{1 + sT/4} = - \frac{(s - 4/T)}{(s + 4/T)}$$

Esta aproximação introduz um zero no semi-plano direito e um ganho negativo na planta, o que complica mais o projeto.

OBS: Há também aproximações de Padé de ordens superiores

b) Aproximação por filtros em série

$$e^{-sT/2} \approx \frac{1}{(1 + Ts/2)^n} \quad ; n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Para } n=1: \quad e^{sT/2} \approx \frac{1}{(1 + Ts/2)} = \frac{2/T}{s + 2/T}$$

Esta aproximação introduz apenas um pólo a mais na planta (não complica tanto o projeto)

OBS: Em geral é uma aproximação pior que a de Padé de mesma ordem, mas não muito

Mais detalhes no Suplemento 1

3.8 Exemplo de projeto

Seja a planta $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ (que é instável)

Queremos que o sistema em malha fechada tenha para a resposta ao

degrau: $M_p = 37,2\%$ ou seja $\xi = 0,3$ e $\omega_n = 2$

$t_r = 0,98 \text{ s}$ equivalente a $s_0 = -0,6 \pm j1,908$

$t_s = 6,7 \text{ s}$

Um compensador $G_c(s) = \frac{K_c(s+\alpha)}{(s+\beta)}$ é capaz de resolver o

problema. Uma técnica comum é cancelar o pólo da planta com o zero do compensador $-\alpha$ e ajustar K_c e β para atender aos requisitos do projeto.

$$G_c G_p(s) = \frac{K_c(s+\alpha)}{(s+\beta)} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

com $\alpha = 1$ temos $G_c G_p(s) = \frac{K_c}{s(s+\beta)}$

A malha fechada é $G_mf(s) = \frac{K_c}{s^2 + \beta s + K_c}$

Desejamos ter $G_mf(s) = \frac{K_c}{s^2 + \beta s + K_c} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ com $\zeta = 0,3$ e $\omega_n = 2$

Portanto: $K_c = \omega_n^2 = 4$ e $G_c(s) = \frac{4(s+1)}{(s+1,2)}$
 $\beta = 2\zeta\omega_n = 1,2$

Vamos escolher a frequência de amostragem:

$G_mf(s) = \frac{4}{s^2 + 1,2s + 4}$ tem uma banda passante (p/-3dB) de 2,91 rad/s, isto é 0,46 Hz

Vamos utilizar duas frequências:

i) $f_1 = 20$ Hz (maior que 30 vezes a BP do sistema)

ii) $f_2 = 5$ Hz (apenas 10 vezes a BP do sistema)

Caso (i): Basta discretizar o Controlador

Usando cas. PZ: $\hat{G}_c(z) = \frac{3,98023233(z - 0,95122942)}{(z - 0,94176453)}$

Caso ii) É necessário reprojatar o controlador

Usaremos a mesma estrutura: $\tilde{G}_c(s) = \frac{k_c(s+\alpha)}{(s+\beta)}$ cancelando α

ii.a) Aprox. Padé

$$\tilde{G}_c ZOH G_p(s) = \frac{-k_c(s+\alpha)}{(s+\beta)} \cdot \frac{(s-20)}{(s+20)} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

$$p/\alpha=1; \quad \tilde{G}_c ZOH G_p(s) = \frac{-k_c(s-20)}{s(s+\beta)(s+20)}$$

$$\text{Malha fechada: } \tilde{G}_{mf}(s) = \frac{-k_c(s-20)}{s^3 + (20+\beta)s^2 + (20\beta-k_c)s + 20k_c}$$

ops! É de 3ª ordem e tem um zero! Como utilizar ξ e ω_n ?

Vamos supor que o denominador seja da forma

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+p)$$

$$\text{O que resultaria em } \tilde{G}_{mf}(s) = \frac{k_c}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{-(s-20)}{(s+p)}$$

Igualando os denominadores:

$$\begin{aligned} s^3 + (20+\beta)s^2 + (20\beta-k_c)s + 20k_c \\ = s^3 + (2\xi\omega_n + p)s^2 + (\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p)s + p\omega_n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \beta - p = 2\xi\omega_n - 20 \\ 20\beta - 2\xi\omega_n p - k_c = \omega_n^2 \\ -p\omega_n^2 + 20k_c = 0 \end{cases}$$

resolvendo para $\omega_n=2$ e $\xi=0,3$

$$\text{temos } \begin{cases} \beta = 1,6301 \\ p = 20,4301 \\ k_c = 4,0860 \end{cases}$$

Com isso:

$$\tilde{G}_c(s) = \frac{4,0860 (s+1)}{(s+1,6301)}$$

Verificando a aproximação:

Note que $-4,0860 \cdot \frac{(s-20)}{(s+20,43)} \approx 4$ (para s peg.)

Portanto:

$$\tilde{G}_{mf}(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Então podemos relacionar $\tilde{\zeta}$ e ω_n com o desempenho do sistema.

OBS: Isso era esperado!

(ii) Filtro 1ª ordem

$$\tilde{G}_{cZOHG_p}(s) = \frac{K_c (s+\alpha)}{(s+\beta)} \cdot \frac{10}{(s+10)} \cdot \frac{1}{s(s+1)}$$

p/ $\alpha=1$, $\tilde{G}_{cZOHG_p}(s) = \frac{10 K_c}{s(s+\beta)(s+10)}$

Malha fechada: $\tilde{G}_{mf}(s) = \frac{10 K_c}{s^3 + (10+\beta)s^2 + 10\beta s + 10K_c}$

ops! Novamente de 3ª ordem (mas é mais simples)

Vamos supor que $\tilde{G}_{mf}(s) = \frac{10 K_c}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+p)}$

Iguando os denominadores

$$\begin{aligned} s^3 + (10+\beta)s^2 + 10\beta s + 10K_c &= \\ = s^3 + (2\zeta\omega_n + p)s^2 + (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p)s + p\omega_n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \beta - p &= 2\zeta\omega_n - 10 \\ 10\beta - 2\zeta\omega_n p &= \omega_n^2 \\ -p\omega_n^2 + 10K_c &= 0 \end{cases}$$

resolvendo para $\omega_n = 2$ e $\xi = 0,3$

temos

$$\begin{cases} \beta = 1,6545 \\ p = 10,4545 \\ K_c = 4,1818 \end{cases}$$

Com isso :

$$\tilde{G}_c(s) = \frac{4,1818 (s+1)}{(s+1,6301)}$$

Verificando a aproximação:

Note que $\frac{10 \cdot 4,1818}{(s+10)} \approx 4$
(para s pequeno)

Portanto

$$\tilde{G}_{mf}'(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ok, mas a aproximação não é tão boa.

Ver approxctrl.m

Observações :

* Via de regra $G_c(s)$ e $\tilde{G}_c(s)$ são parecidas, qualquer que seja a abordagem adotada

* Quando f aumenta, $\tilde{G}_c(s) \rightarrow G_c(s)$

* A compensação do efeito do ZOH é uma aproximação.

ZOH \rightarrow atraso é uma aproximação

atraso \rightarrow Padé, etc é uma aproximação

* $\tilde{G}_p(s)$ tem ordem maior que $G_p(s)$, mas comportamento semelhante.

(se não tiver é porque a frequência está baixa demais)

* O projeto pode ficar mais complicado ou não (veja o Suplemento 1)

AULA 13
XU
(*)
AULA 13
2009

3.8. Um pouco de espaço de estados

Seja a seguinte descrição de um sistema SLIT a tempo contínuo, possivelmente multivariável.

$$\Sigma_c: \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad ; \quad x, \dot{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Esta forma transforma uma equação diferencial de ordem n em n equações diferenciais de 1º ordem (devido a H. Poincaré 1854-1912)

Se tornou popular em Controle a partir da década de 50

Razões:

- Bom para tratar controle multivariável (exigência de aplicações aeroespaciais)
- Bom para CAD (computadores se dão bem com matrizes)
- Solução tem forma analítica fechada

A versão discreta tem a seguinte estrutura

$$\Sigma_d: \begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

3.8.1 Convertendo tempo contínuo em tempo discreto

Solução de Σ_c :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-z)} B u(z) dz$$

ou

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} B u(z) dz \quad p/ \quad t_0 = kT \quad e \quad t = (k+1)T$$

supondo $u(z) = u(kT) \quad p/ \quad kT \leq z < (k+1)T$ (é a única aprox. que faremos)

temos

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(t-z)} B dz u(kT)$$

fazendo $\eta = (k+1)T - z$ resulta

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\eta} B d\eta \cdot u(kT)$$

ou seja

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$\text{com } \Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\eta} B d\eta = \int_0^T (I + A\eta + \frac{A^2 \eta^2}{2!} + \dots) B d\eta$$

OBS:

- i) A única aproximação feita foi considerar $u(t)$ constante por trechos
- ii) $x(k)$ e $u(k)$ representam as mesmas grandezas (o estado e a entrada discretos são os mesmos que nas variáveis contínuas)

iii) Tendo em vista (ii)

$$y(k) = Cx(k)$$

iv) O comando `c2d` do Matlab faz o truque

3.8.2 Comparação com tempo contínuo

Estabilidade

Σ_d é estável se $\rho_e(\Phi) < 1$ (ou seja, todos os autovalores de Φ tiverem módulo menor que 1)

(no caso contínuo: parte real negativa)

Propriedades

Controlabilidade, Observabilidade, Estabilizabilidade, Detectabilidade
são iguais ao caso contínuo (são puramente algébricas)

Técnicas

Controle por realimentação de estado é igual ao caso contínuo
(o estado e a entrada são as mesmas)

Observador de Luenberger é similar ao caso contínuo
(o observador em si é um sistema discreto)

Princípio da separação é igual ao caso contínuo
(o princípio é algébrico)

etc. etc.

fim (*)
salto p/ (**)

AULA 15
2008

4. Controlador PID discreto

4.1 Introdução

De 90 a 95% dos problemas de controle na indústria são resolvidas com controladores PID. (levantamento da década de 80)

Praticamente todos os controladores PID industriais disponíveis hoje no mercado são digitais.

4.2 PID básica

Os PIDs existem desde a década de 1920 (portanto antes do nascimento da teoria de controle clássico) em diversas formas. O padrão preferido hoje (com variações) é a formulação ISA.

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right)$$

ou

$$U(s) = U_P(s) + U_I(s) + U_D(s) \quad \text{com} \quad U_P(s) = K_p E(s)$$

$$U_I(s) = \frac{K_p \cdot 1}{T_i s} E(s)$$

$$U_D(s) = K_p T_D s \cdot E(s)$$

U_P : Não tem dinâmica, logo:

$$U_P(z) = K_p E(z)$$

U_I : Qualquer dos métodos poderia ser empregado. O melhor método que temos para aproximar uma integral é o método de Tustin, assim

$$U_I(z) = \frac{K_p \cdot T}{T_i \cdot 2} \frac{(z+1)}{(z-1)} E(z)$$

U_D : Nem todos os métodos podem ser empregados. A melhor aproximação de um derivador puro é dada pelo método das diferenças finitas p/ trás (cf. item 3.2) ou retangular p/ trás.

$$\text{Ou seja: } U_D(z) = \frac{K_P T_D}{T} \frac{(z-1)}{z} E(z)$$

O método de Tustin também pode ser usado, resultando em

$$U_D(z) = \frac{2 K_P T_D}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} E(z)$$

Com isso o PID discreto fica

$$\begin{aligned} G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{U_P(z) + U_I(z) + U_D(z)}{E(z)} = \\ &= K_P \left(1 + \frac{T}{2T_I} \frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{T_D}{T} \frac{(z-1)}{z} \right) \end{aligned}$$

onde K_P , T_I e T_D são os mesmos do PID contínuo.

4.3 Um PID mais realista

Os PID's efetivamente implementados na indústria em geral diferem bastante da formulação ISA básica. Incorporam não-linearidades, malhas auxiliares de realimentação, ponderações diferentes nos ganhos e nas entradas, etc. frequentemente para lidar com problemas bastante específicos.

Seguem aqui apenas algumas variações mais importantes.

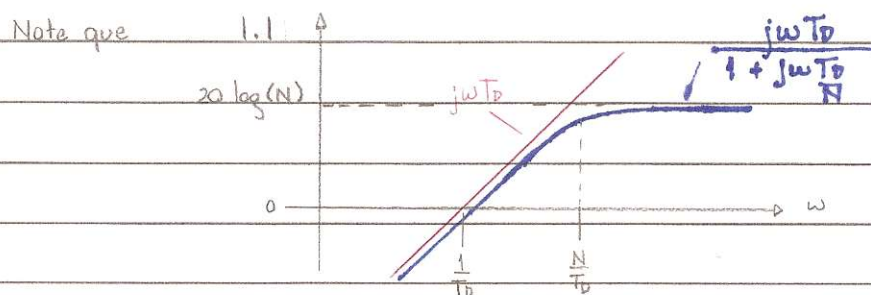
De modo geral essas variações são sempre mais fáceis de se fazer em implementações digitais do que nas analógicas.

1) Limitação da banda do derivador.

O termo $U_D(s) = K_D T_D s E(s)$, além de impróprio, tem banda idealmente infinita. O seu ganho é cada vez mais alta com o aumento da frequência, o que serve basicamente para amplificar ruídos.

Na prática o termo é substituído por

$$U_D'(s) = T_D K_D \frac{s}{1 + \frac{s T_D}{N}} E(s) \quad ; \text{tipicamente com } 3 \leq N \leq 20$$



A aproximação é boa em baixas frequências e tem ganho limitada em altas frequências. Tipicamente:

Ambiente mais ruidoso $\rightarrow N$ menor

Ambiente menos ruidoso $\rightarrow N$ pode ser maior

2) Derivação da saída da planta

Frequentemente se usa

$$U_D''(s) = -K_D T_D \frac{s}{(1 + \frac{s T_D}{N})} Y(s)$$

ou seja, deriva-se a saída da planta $Y(s)$ em vez do sinal de erro $E(s) = R(s) - Y(s)$

Razões para isso:

i) Objetivamente se quer reduzir oscilações no sinal de saída da planta $Y(s)$ que é um sinal real e não no erro $E(s)$, que é um sinal que só existe internamente ao controlador (ao contrário da componente integradora, em que queremos efetivamente que o erro $E(s)$ se anule)

ii) O sinal de erro $E(s)$ pode variar muito rapidamente sem que a saída da planta varie (bastando que o setpoint $R(s)$ varie rapidamente)

iii) O sinal de erro $E(s)$ pode ser descontínuo (por exemplo ao se aplicar um degrau em $R(s)$)

iv) Se o setpoint $R(s)$ for constante,

$$\frac{-K_p T_D}{(1 + \frac{s T_D}{N})} Y(s) = \frac{K_p T_D}{(1 + \frac{s T_D}{N})} E(s)$$

3) Anti-windup no integrador.

Frequentemente em sistemas práticos, a planta deixa de responder a ações de controle em certas situações, por fatores tais como

- Saturação do atuador;
- Problemas estruturais da planta;
- Falhas mecânicas;
- Incapacidade da planta em operar em certas regiões, etc.

Nestas situações, a saída da planta $Y(s)$ não atinge o setpoint $R(s)$, qualquer que seja a saída do controlador, o que leva a componente $U_i(s)$ a crescer cada vez mais e saturar a saída do controlador. Quando o problema é resolvido ou o sistema é levado a um ponto de operação

admissível (p.ex. pela redução do setpoint), o controle continua saturado devido ao integrador e pode levar um tempo muito longo para voltar a responder (a isso se dá o nome de windup)

OBS: Todo integrador em um sistema de controle deve prever alguma forma de saturação e anti-windup.

Como fazer anti-windup? Há diversas variações. A mais simples é congelar os integradores quando houver saturação na saída do controlador.

4) Infinitas variações

Exemplos: Ganho variável com o erro

Erro grande \rightarrow ganho baixo; inibe oscilações e windup

Erro pequeno \rightarrow ganho alto; melhora a regulação e o desempenho

Ganho variável com a saída da planta

y grande \rightarrow ganho alto

y pequeno \rightarrow ganho baixo

Para sistemas que respondem rapidamente para y pequeno e lentamente para y grande. Tipicamente: rotação de motores de combustão e turbinas.

Ganho variável com o sinal algébrico do erro

Erro positivo $\rightarrow K_p$

Erro negativo $\rightarrow K_p'$

Para sistemas que sofrem o efeito da gravidade como braços mecânicos, guindastes, etc.

E por aí vai.

4.4. Discretizando o PID realista

Não-linearidades, etc. são mais facilmente implementadas em computador

Anti-windup: É um simples IF na implementação

IF $U(k-1) \geq 100\%$ OR $U(k-1) \leq -100\%$

$EI = 0$

ELSE

$EI = R(k) - Y(k)$

$UI(k) = f(EI)$

$UP(k) = f(R(k) - Y(k))$

$UD(k) = \dots$

$U(k) = UP(k) + UI(k) + UD(k)$

:

Termo derivativo

O termo $U_D''(s) = -K_p T_D \frac{s}{1 + \frac{s T_D}{N}} \cdot Y(s)$ pode, a princípio, ser

discretizado por qualquer método, porém há aspectos importantes a observar

i) Método de Tustin

Pode-se mostrar que $U_D''(z) = \frac{-2K_p T_D N}{T(TN + 2T_D)} \cdot \frac{z-1}{z + \frac{(TN - 2T_D)}{(TN + 2T_D)}} \cdot Y(z)$

Normalmente, se sintonizam os PID's usando T_D pequeno (devido a ruídos, etc.) Nessa situação a póla associada ao derivador é tal que

$$\frac{-(TN - 2T_D)}{(TN + 2T_D)} \approx -1$$

O polo $\{-1\}$ tem caráter extremamente oscilatório, o que não é desejável.

OBS: A menos disso o polo é sempre estável.

Note que

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{z-1}, \text{ equivalente a}$$

$x(k) = -x(k-1) + u(k-1)$ tem resposta impulsiva

$$\{0, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

AVIA 16
2009

ii) Diferença finita para trás

$$\text{Pode-se mostrar que } U_D(z) = \frac{-k_p T_D N}{TN + T_D} \frac{z-1}{\left[z - \frac{T_D}{(TN + T_D)}\right]} Y(z)$$

Quando T_D é pequeno, o polo é aproximadamente $\{0\}$, que é estável

OBS: O polo é sempre estável.

Note que

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{z} \text{ equivale a } x(k+1) = u(k)$$

Conclusão: O método das diferenças finitas é normalmente preferível.

4.5 Influência do período de amostragem

O PID discretizado sofre os mesmos efeitos que outros compensadores, como condicionamento numérico, contração do mapeamento, efeito do ZOH, etc.

Quando $T \rightarrow 0$, o derivador (qualquer que seja a aproximação) se transforma num oscilador de frequência de oscilação e ganhos infinitos.

Quando a frequência de amostragem é baixa os efeitos do ZOH são mais pronunciados, porém como o PID usualmente não é projetado, mas apenas sintonizado de acordo com a resposta da planta, o impacto desse fenômeno não é tão sentido.

4.6 Atividades

Veja o Suplemento 1