GABARITO Prova 1 - Física 1 para o Instituto Oceanográfico (4300111)

Prof. José Roberto B. Oliveira - IFUSP - 18/09/2012

1. A velocidade $\vec{v}$ de um objeto varia no tempo de acordo com a fórmula: $\vec{v}(t) = a\cos(\omega t)\hat{x} + bt\hat{y} + c\hat{z}$, onde a, b, c e ω são constantes e $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ os versores do sistema de coordenadas carteziano em 3 dimensões.

(a) [1.0] Obtenha a expressão da aceleração em função do tempo $\vec{a}(t)$.

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega\sin(\omega t)\hat{x} + b\hat{y}$

(b) [1.0] Obtenha a expressão para o vetor posição em função do tempo $\vec{r}(t)$ sabendo que, para $t = 0$, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$.

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')dt' = \vec{r}_0 + \frac{a}{\omega}\sin(\omega t)\hat{x} + b\frac{t}{2}^2\hat{y} + ct\hat{z}$

Sendo $a = 3\pi$ m/s, $b = 10\text{m/s}^2$, $c = 2\text{m/s}$, $\omega = \pi$ rad/s e $\vec{r}_0 = 5\hat{z}$, determine:

(c) [0.5] o vetor posição para $t = 2$s.

$\vec{r}(2) = 20\hat{y} + 9\hat{z}$

(d) [0.5] a velocidade média e a aceleração média no intervalo de $t = 0$ a $t = 2$s.

$< \vec{v} >= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2)-\vec{r}_0}{2} = \frac{20\hat{y}+4\hat{z}}{2} = 10\hat{y} + 2\hat{z}$

$< \hat{a} >= \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(2)-\vec{v}(0)}{2} = \frac{2b\hat{y}}{2} = 10\hat{y}$

---

2. Dois blocos, um deles com massa m e o outro com massa $2m$, estão ligados por um fio ideal através de uma polia ideal fixa ao ponto de encontro de duas rampas concorrentes, conforme a figura 1. O coeficiente de atrito cinético entre os blocos e a superfície das rampas é μ_c. O bloco mais pesado escorrega para baixo do alto da rampa com aceleração a (em módulo). Determine, em função do ângulo θ de inclinação das rampas e do coeficiente de atrito μ_c:

(a) [2.0] A razão entre a aceleração dos blocos e a aceleração da gravidade $\frac{a}{g}$ e o valor da razão entre a tensão da corda e o peso do bloco mais leve $\frac{T}{mg}$.

Do diagrama de corpo livre para a massa m: $F_{a1} = \mu_c mg\cos\theta$, e $ma = T - mg\sin\theta - \mu_c mg\cos\theta$, ou seja:

(I) $\frac{a}{g} = \frac{T}{mg} - \sin\theta - \mu_c\cos\theta$

Do diagrama de corpo livre para a massa $2m$: $F_{a2} = 2\mu_c mg\cos\theta$, e $2ma = -T + 2mg\sin\theta - 2\mu_c mg\cos\theta$, ou seja:

(II) $2\frac{a}{g} = -\frac{T}{mg} + 2\sin\theta - 2\mu_c\cos\theta$

Somando a eq. I com a eq. II:

$3\frac{a}{g} = \sin\theta - 3\mu_c\cos\theta$, portanto $\frac{a}{g} = \frac{1}{3}\sin\theta - \mu_c\cos\theta$.

Para obter $\frac{T}{mg}$, basta substituir $\frac{a}{g}$ na eq. I: $\frac{1}{3}\sin\theta - \mu_c\cos\theta = \frac{T}{mg} - \sin\theta - \mu_c\cos\theta$, portanto $\frac{T}{mg} = \frac{4}{3}\sin\theta$.

Suponha que o bloco mais pesado escorregue praticamente a partir do repouso, no instante $t = 0$ representado na figura, até atingir a base da rampa, descendo de uma altura h medida na vertical. Dados: $g = 10\text{m/s}^2$; $m = 4$kg; $\mu_c = 1/6$; $\theta = \frac{\pi}{4}$; $h = 15$m. Determine:

(b) [1.0] A variação da energia cinética (em J), e a velocidade escalar final correspondente dos blocos (em m/s).

Por conservação de energia, $K = \Delta U + W_{atrito} = 2mgh - mgh - F_{a1}\Delta S - F_{a2}\Delta S = mgh - 3\mu_c mg\cos\theta\Delta S$ (sendo $\Delta S = \frac{h}{\sin\theta}$ a distância percorrida pelos blocos ao longo do plano inclinado). Substituindo os valores dados:

$K = mgh(1 - 3\mu_c/\tan\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}mgh = 2\times 10\times 15 = 300$J

$K = \frac{1}{2}(3m)v^2$, $v^2 = \frac{2}{3}K/m = \frac{2}{3}gh = 100$, portanto $v = 10$m/s.

(c) [0.5] O tempo transcorrido e a potência média dissipada no processo.

Uniformemente acelerado: $<v>= 5\text{m/s}$; $t = \frac{\Delta S}{<v>} = \frac{h}{<v>\sin\theta} = \frac{15\sqrt{2}}{5} = 3\sqrt{2}\text{s}$. $W_{atrito} = -3\mu_c mg\cos\theta\Delta S$, portanto:

$P_{diss} = -W_{atrito}/t = 3\mu_c mg\cos\theta <v>= 10\sqrt{2}\text{W}$

(d) [0.5] A variação da altura Δh_{CM} do centro de massa do sistema.

$h_{CM(inicial)} = \frac{2mh+0}{3m} = \frac{2h}{3}$; $h_{CM(final)} = \frac{h}{3}$; $\Delta h_{CM} = -\frac{h}{3} = -5\text{m}$

---

3. Em um certo sistema bi-dimensional a força sobre uma partícula varia com a posição de acordo com a fórmula: $\vec{F}(x,y) = \alpha\frac{y^2}{2}\hat{x} + \beta xy\hat{y}$, onde α e β são parâmetros constantes.

(a) [1.0] Calcule o trabalho realizado por esta força em cada um dos trechos *a-b*, *b-c*, *c-d*, e *d-a* no plano xy e no caminho fechado quadrado *a-b-c-d-a* , com vértice na origem e de lado 1m ($x_c = y_c = 1$m, Figura 2), em função dos parâmetros α e β.

$W_{ij} = \int_i^j \vec{F}(x,y).d\vec{r}$; $\vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\hat{x} + F_y(x,y)\hat{y}$

$F_x(x,y) = \alpha\frac{y^2}{2}$; $F_y(x,y) = \beta xy$

$W_{ab} = \int_a^b F_x(x,0)dx = 0$; $W_{bc} = \int_b^c F_y(1,y)dy = \int_b^c \beta y dy = \beta\frac{y_c^2}{2} = \frac{\beta}{2}$; $W_{cd} = \int_c^d F_x(x,1)dx = \int_c^d \alpha\frac{y_c^2}{2}dx = -\alpha\frac{y_c^2}{2}x_c = -\frac{\alpha}{2}$; $\int_d^a F_y(0,y)dy = 0$

$W_{abcd} = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$

(b) [1.0] Determine, com base no resultado anterior, a relação entre α e β para que a força $\vec{F}$ possa ser uma força conservativa. Explique.

$W_{abdc} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$, pois para uma força conservativa, em um caminho fechado: $W = \oint \vec{F}.dr = 0$, e *abcd* é um caminho fechado.

(c) [1.0] Obtenha uma possível função potencial $U(x,y)$ e verifique se $\vec{F}$ pode ser obtida de U, confirmando se $\vec{F}$ é uma força conservativa ou não. Sugestão: escolha um caminho conveniente que leve da origem ao ponto x, y para determinar o trabalho correspondente da força $\vec{F}$.

Escolhendo um trecho retilíneo de $(0,0)$ até $(x,0)$, seguido de outro trecho retilíneo de $(x,0)$ até (x,y) obtemos:
$W_{(0,0)\to(x,y)} = \int_0^x F_x(x',0)dx' + \int_0^y F_y(x,y')dy' = 0 + \frac{\beta}{2}xy^2 = \frac{\beta}{2}xy^2$.
Se existe uma função potencial, etendo como ponto de referência a origem: $W_{(0,0)\to(x,y)} = -U(x,y)$, portanto $U(x,y) = -\frac{\beta}{2}xy^2$. Para que seja conservativa,$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}$. Aplicando à função $U(x,y)$ encontrada, $-\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\frac{\beta}{2}xy^2) = \frac{\beta}{2}y^2\hat{x} + \beta xy\hat{y} = \vec{F}(x,y)$ (para $\alpha = \beta$), portanto é uma força conservativa.

Figura 1

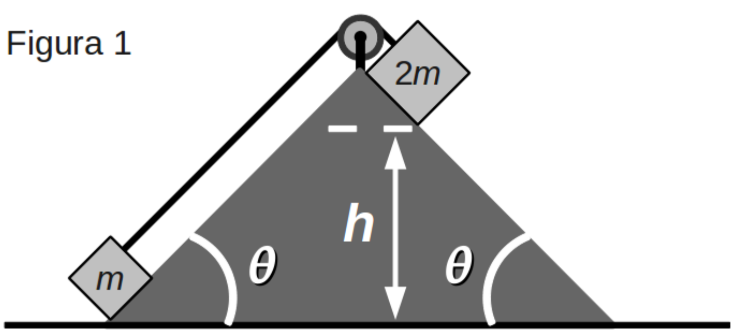

Figura 2