

PMR3404 – Controle I
Projeto de Laboratório

BALL AND BEAM

1. Descrição

O consiste numa haste, de inércia não desprezível e acionada por um motor DC, sobre a qual se deve equilibrar uma bola metálica. Um sensor de posição mede o deslocamento da bola em relação ao centro da haste. O objetivo do sistema de controle é levar a bola a uma posição desejada e assim mantê-la em face de distúrbios externos.

2. Modelo matemático

A Figura 1 ilustra o sistema. A bola possui massa m_b , momento de inércia J_b e raio r_b . A haste possui momento de inércia J_l , massa m_l e comprimento $2L$.



Figura 1 – Foto e esquema do sistema Ball and Beam

O torque na haste é dado por $\tau(t)$. A posição angular da haste relativa ao eixo horizontal é dada por $\theta(t)$ e a distância da bola ao centro da haste é dada por $p(t)$.

2.1. Equações de movimento

As equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} \left[\frac{J_b}{r_b^2} + m_b \right] \ddot{p}(t) + m_b g \sin(\theta(t)) - m_b p(t) \dot{\theta}(t)^2 = 0 \\ [m_b p(t)^2 + J_l + J_b] \ddot{\theta}(t) + 2m_b p(t) \dot{p}(t) \dot{\theta}(t) + m_b g p(t) \cos(\theta(t)) = \tau(t) \end{cases}$$

Aqui, g é a constante gravitacional.

2.2. Dinâmica do Motor

O torque na haste é fornecido por um motor cuja dinâmica é dada por

$$\begin{cases} v(t) = L_m \frac{di}{dt} + R_m i(t) + K_b \omega(t) \\ J_m \dot{\omega}(t) + K_v \omega(t) = T_m(t) - \frac{\tau(t)}{K_r} \\ T_m(t) = K_m i(t) \\ \omega(t) = \dot{\theta}(t) K_r \end{cases}$$

Na qual $v(t)$ é a tensão na armadura, $i(t)$ é a corrente de armadura, $\omega(t)$ é a velocidade angular, T_m é o torque fornecido pelo motor, L_m é a indutância da

armadura, R_m é a resistência de armadura, J_m é o momento de inércia do rotor, K_b é a constante eletromotriz, K_v é o coeficiente de atrito viscoso no mancal, K_m é a constante de torque do motor e K_r é a relação de transmissão.

2.3. Parâmetros

Parâmetro	Valor
Momento de inércia de uma esfera	$J = \frac{2}{5}mr^2$
Momento de inércia de uma haste (em relação ao eixo central)	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Massa da bola m_b	0.064 kg
Raio da bola r_b	0.02 m
Massa da haste m_l	0.4 kg
Comprimento da haste 2L	0.5 m
Relação de transmissão K_r	5: 1
Momento de inércia do rotor J_m	$4.0 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Atrito viscoso no mancal K_v	$0.0 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$
Indutância de armadura L_m	1.16 mH
Resistência de armadura R_m	1.5 Ω
Constante de torque K_m	0.22 N.m/A
Constante eletromotriz K_b	0.22 V.s/rad
Máxima corrente	10 A

3. Requisitos de desempenho

O sistema de controle deve levar a bola para a posição desejada e mantê-la em equilíbrio sobre a haste com as seguintes características em malha fechada:

- Erro de regime igual a zero para o comando de referência variando na forma de degrau;
- Máximo sobressinal menor do que 10% para o comando de referência variando na forma de degrau;
- Tempo de assentamento de 2% compatível com a dinâmica do sistema para o comando de referência variando na forma de degrau (estabeleça claramente o valor);
- Margem de ganho maior do que 10 dB;
- Margem de fase maior do que 45°;
- Rejeição completa de qualquer perturbação constante.
- Esforço de controle compatível com o valor máximo de corrente permitido na armadura.

- Dica: Pode ser necessário o uso de um controlador em cascata para a estabilização do sistema. Por quê? Neste caso considere uma segunda variável de estado, além da posição da bola, como medida.