PMR3404 Controle I
Aula 5

Lugar das Raízes

Newton Maruyama

6 de abril de 2017

PMR-EPUSP

Conteúdo

Introdução

- Neste capítulo é apresentado o método do lugar das raízes, que consiste basicamente em levantar a localização dos pólos de um sistema em malha fechada em função da variação de um parâmetro K.
- O projeto de controladores envolve sempre a escolha da localização de pólos e zeros do sistema em malha fechada, que deve ser traduzida através da escolha da estrutura do controlador e dos seus parâmetros (Como em controlares P, PI, PD e PID).

- Desta forma, a utilização do lugar das raízes pode ser útil no projeto de controladores pois neste pode-se observar a movimentação dos pólos em malha fechada a medida que um parâmetro K varia.
- Ao final apresenta-se exemplos da utilização do método do lugar das raízes para o projeto de controladores.

- Considere o seguinte sistema em malha fechada ilustrado na Figura 1

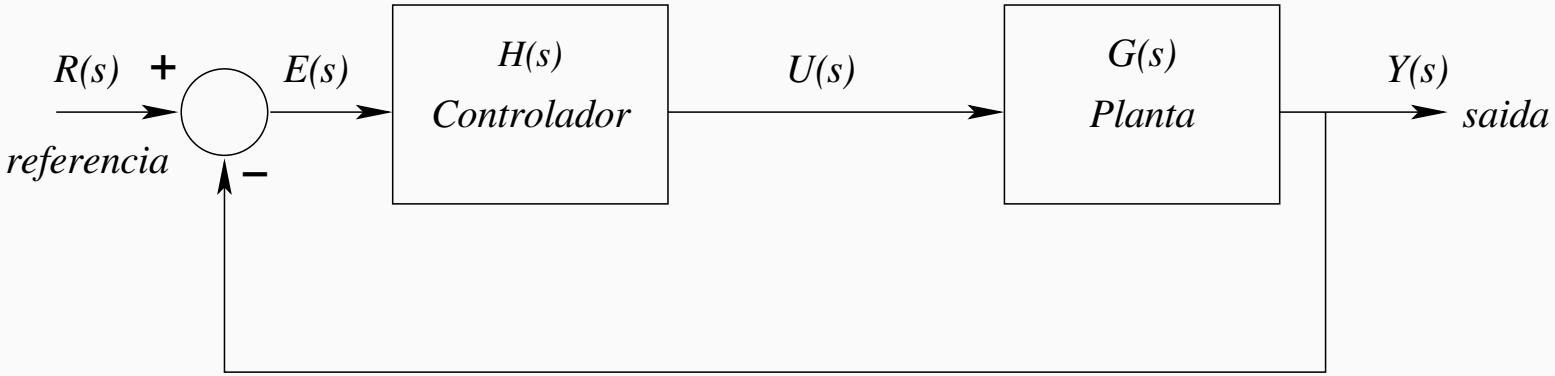

Figura 1: Sistema de controle em malha fechada.

- A equação em malha fechada deste sistema pode ser escrita como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s).}$$

- Os pólos em malha fechada deste sistema podem ser encontrados resolvendo-se a seguinte equação característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0,$$

ou

$$G(s)H(s) = -1.$$

- Como $G(s)H(s)$ é um número complexo, podemos escrever as seguintes equações:

$$\text{Condição do ângulo:} \quad \angle G(s)H(s) = \pm 180^o(2 * k + 1)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\text{Condição do módulo:} \quad |G(s)H(s)| = 1.$$

Em muitos casos $G(s)H(s)$ envolve um ganho K:

$$1 + K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0.$$

Para começarmos a esboçar o lugar das raízes é necessário conhecer os pólos e zeros de $G(s)H(s)$. Os ângulos de qualquer ponto s em relação aos pólos e zeros de $G(s)H(s)$ devem ser medidos no sentido anti-horário.

O lugar das raízes é um gráfico que fornece as raízes em malha fechada no plano s em função da variação de K ($0 < K < \infty$).

Um exemplo

Por exemplo, seja o seguinte sistema:

$$\frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)},$$

onde $-p_2$ e $-p_3$ são pólos complexos conjugados. Podemos escrever a condição de ângulo como a seguir:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4,$$

A Figura 2 ilustra os ângulos para dois pontos de teste distintos.

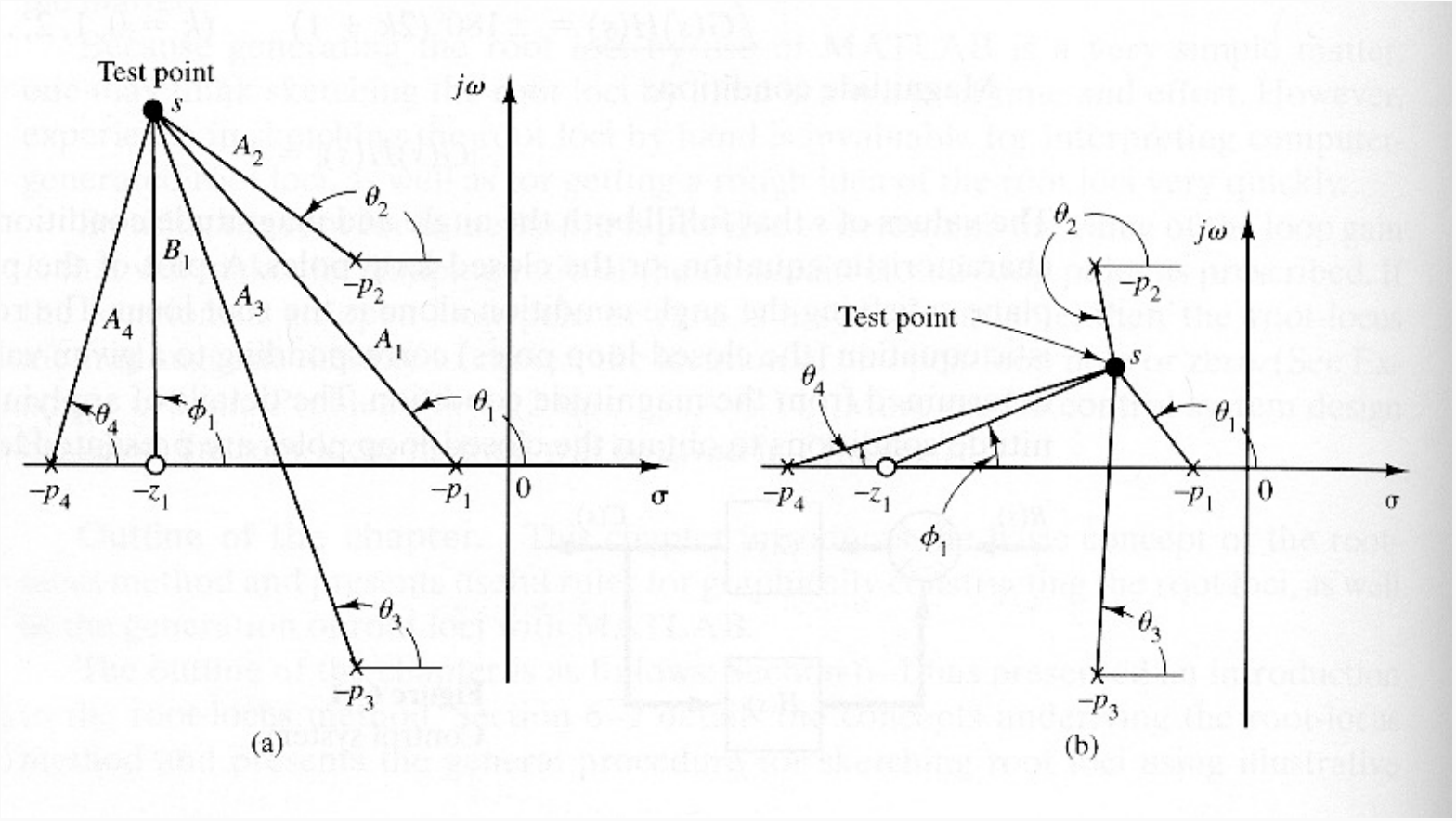

Figura 2: (a),(b): Ângulos de dois pontos de teste em relação os pólos e zeros de $G(s)H(s)$.

A condição do módulo é dada por:

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}.$$

onde A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1 são os módulos das grandezas complexas, $s + p_1$, $s + p_2$, $s + p_3$, $s + p_4$ e $s + z_1$, como pode ser observado na Figura 2(a).

Note que pelo fato dos pólos complexos conjugados ou zeros complexos conjugados (se existirem) serem simétricos, o lugar das raízes também é simétrico em relação ao eixo real σ.

Suponha que desejamos construir o lugar das raízes do sistema de controle em malha fechada ilustrado na Figura 1. Onde:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)},$$

e

$$H(s) = 1.$$

Deseja-se construir o lugar das raízes para se determinar o valor K tal que o coeficiente de amortecimento ζ de um par de pólos complexos conjugados dominantes seja igual a $\zeta = 0.5$.

A condição do ângulo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\angle G(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \\
&= -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2), \\
&= \pm 180^o(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

A condição do módulo pode ser escrita como:

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1.$$

Passo1: Eixo real

O primeiro passo para a construção do lugar das raízes é a localização dos pólos em malha aberta, $s = 0$, $s = -1$, $s = -2$ no plano complexo (não existem zeros neste caso).

Note que os pontos de partida do lugar das raízes são as raízes de $G(s)H(s)$. O número de trechos do lugar das raízes é três o que equivale ao número de pólos em malha aberta.

Alguns pontos de teste

- Vamos supor que o ponto de teste se encontra na região positiva, i.e., $s = \sigma > 0$. Para qualquer ponto $s = \sigma > 0$ temos:

$$\angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^o.$$

Desta forma, a condição de ângulo para $s = \sigma > 0$ não é satisfeita.

- Para $s = -1 < \sigma < 0$ temos:

$$\angle s = 180^o,$$
$$\angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^o.$$

Desta forma:

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -180^o.$$

Logo, o trecho $-1 < \sigma < 0$ pertence ao lugar das raízes.

- Para $s = -2 < \sigma < -1$ temos

$$\angle s = 180^o,$$
$$\angle(s+1) = 180^o,$$
$$\angle(s+2) = 0^o.$$

Desta forma:

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -360^o.$$

Logo, o trecho $-2 < \sigma < -1$ não pertence ao lugar das raízes.

- Para $s = -\infty < \sigma < -2$ temos

$$\angle s = 180^o,$$
$$\angle(s+1) = 180^o,$$
$$\angle(s+2) = 180^o.$$

Desta forma:

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -3 \times 180^o.$$

Logo, o trecho $-\infty < \sigma < -2$ pertence ao lugar das raízes

Conclusão sobre o eixo real

Portanto, no eixo real o lugar das raízes existe entre $-1 < \sigma < 0$ e $-\infty < \sigma < -2$.

Passo2: Determinar as assíntotas no lugar das raízes

Se o ponto de teste está localizado longe da origem então:

$$\lim_{s=\infty} G(s) = \lim_{s=\infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s=\infty} \frac{K}{s^3},$$

ou seja, a condição do ângulo pode ser escrita como:

$$-3\angle s = \pm \frac{180^o(2k+1)}{3} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

A equação do ângulo das assíntotas pode então ser escrita como:

$$\text{ângulo das assíntotas} = \frac{\pm 180^o(2k+1)}{3} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Os ângulos são portanto: 60°,-60°, e 180°.

Caso geral

Para qualquer sistema as assíntotas podem ser calculadas através da seguinte equação:

$$\text{ângulo das assíntotas} = \frac{\pm 180^o(2k+1)}{n-m} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Onde:

- n = número de pólos finitos de $G(s)H(s)$,
- m = número de zeros finitos de $G(s)H(s)$.

O ponto de intersecção das assíntotas σ_a pode ser calculado como a seguir:

$$\sigma_a = \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n - m}.$$

Onde (Veja Equação **??**):

$$a_{n-1} = \sum \text{pólos em malha aberta},$$
$$b_{m-1} = \sum \text{zeros em malha aberta}.$$

Para o sistema em questão temos:

$$\sigma_a = \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n - m} = \frac{-3 - 0}{3 - 0} = -1.$$

Passo 3: breakway point

O ponto de saída do eixo real se encontra entre os pólos de malha aberta $s = 0$ e $s = -1$ e corresponde a um ponto onde os pólos são duplos.

O ponto de saída do eixo real pode ser determinado através da seguinte equação[1]:

$$\frac{dK}{ds} = 0.$$

[1] Na Seção **??** apresenta-se a dedução desta equação.

Para o sistema em questão, a equação característica pode ser representada como:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0,$$

o que resulta em:

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s).$$

Calculando a derivada, obtemos:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0.$$

As raízes desta equação de 2a. ordem são: $s = -0.4226$ que corresponde a $K = 0.3849$, e $s = -1.5774$ que corresponde a $K = -0.3849$.
Note que a raiz $s = -1.5774$ não pode ser a solução pois corresponde a um ganho negativo. Por outro lado, sabemos que a solução está no intervalo $[-1, 0]$, logo a solução é dada por $s = -0.4226$.

Passo 4: cruzamento com o eixo imaginário

Esses pontos podem ser encontrados, utilizando o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, já que o ponto de cruzamento representa o ponto de transição de uma região estável para uma região instável.

A equação característica é dada por:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0.$$

Passo 4: ...

A tabulação de Routh-Hurwitz é a seguinte:

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 3 & K \\
s^1 & \frac{6-K}{3} & \\
s^0 & K &
\end{array}
$$

Passo 4: ...

Para que o sistema seja estável a primeira coluna deve conter todos os elementos com o mesmo sinal, então concluímos neste caso que todos os elementos devem ser positivos. Na linha referente a s^1, temos $\frac{6-K}{3} > 0 \Rightarrow K < 6$. Ou seja, $K = 6$ é o valor de transição.

Passo 4: ...

A solução para o problema, pode ser encontrado adotando o valor $K = 6$ e a equação auxiliar referente a s^2:

$$
\begin{aligned}
&3s^2 + K = 0 \Rightarrow \\
&3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow \\
&s^2 = -2 \Rightarrow \\
&s = \pm j\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Passo 5: Pontos de teste na vizinhança do eixo $j\omega$ e da origem

Escolha um ponto de teste na vizinhança do eixo $j\omega$ e da origem como ilustrado na Figura 3.

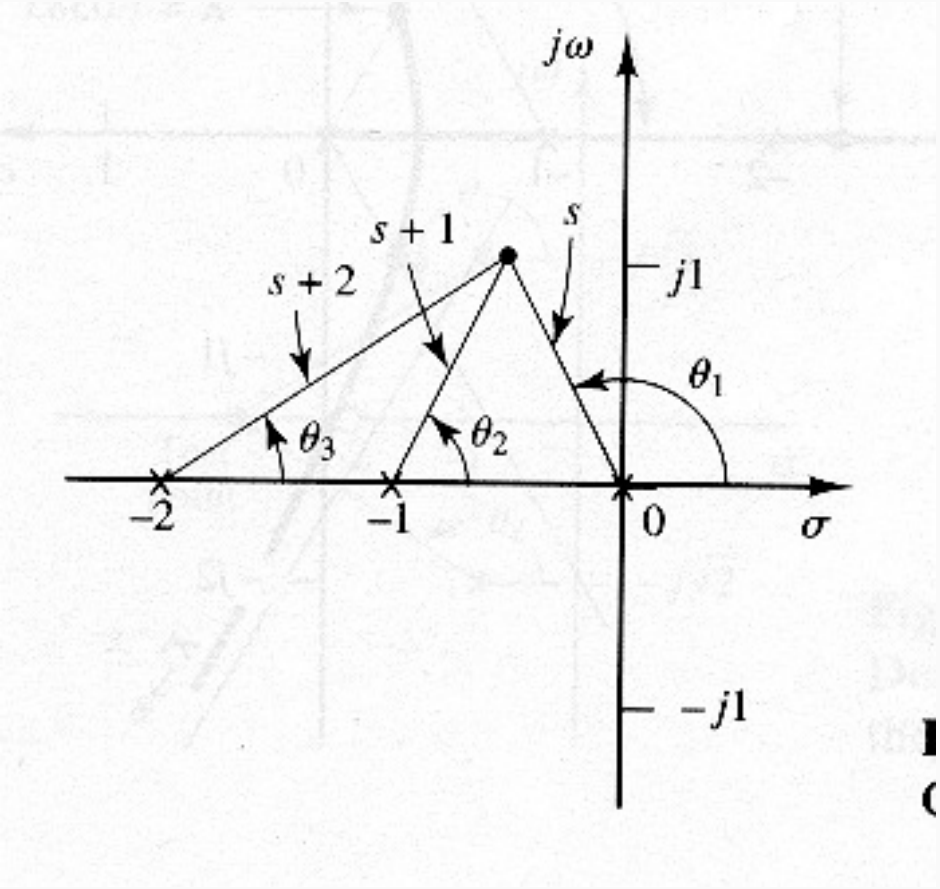

Figura 3: Escolha de um ponto de teste.

Verifique a condição de ângulo, caso não seja satisfeita escolha um outro ponto.

Passo 6: Desenhe o lugar das raízes

A Figura 4 ilustra o lugar das raízes resultante.

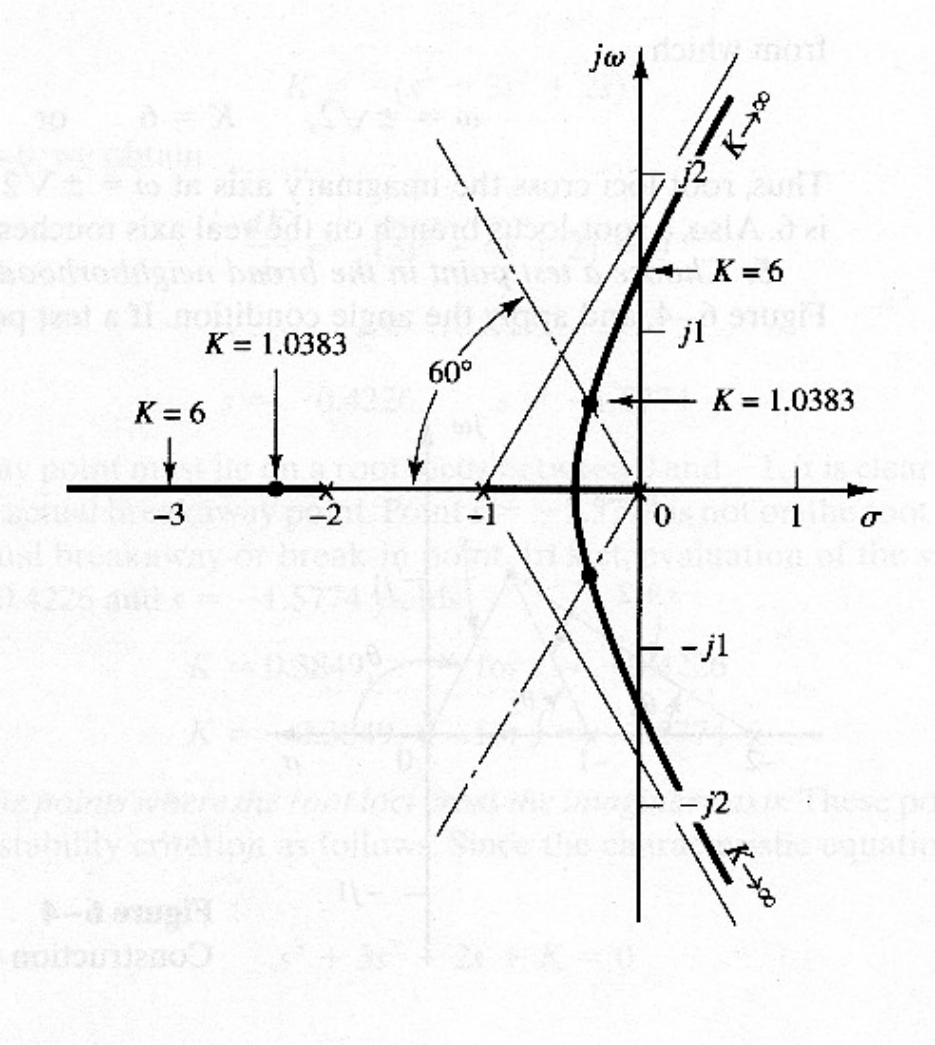

Figura 4: Lugar das raízes para $G(s)H(s) = K/s(s+1)(s+2)$.

Passo 7: Determinar o par de pólos complexos conjugados para $\zeta = 0.5$

Sabemos que $\cos\beta = \zeta$ (veja Figura 5), logo temos:

$$\beta = \cos^{-1} 0.5 = \pm 60^o.$$

Ou seja, a solução do problema pode ser determinada pela intersecção entre retas com um ângulo de 60° em relação ao eixo real e o lugar das raízes.

Passo 7: ...

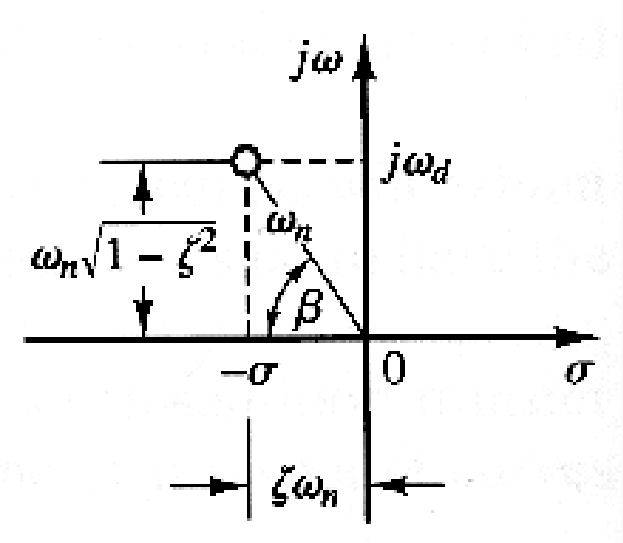

Figura 5: Pólos complexos e grandezas associadas.

Passo 7: ...

Os pólos correspondentes podem ser determinados no gráfico:

$$s_1 = -0.3337 + j0.5780,$$
$$s_2 = -0.3337 - j0.5780.$$

Passo 7: ...

Para descobrir o valor de K correspondente podemos utilizar a condição de módulo:

$$|G(s)H(s)| = \left|\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$|K| = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0.3337+j0.5780} \Rightarrow$$

$$K = 1.0383.$$

Com este valor de K é possível achar o terceiro pólo em $s = -2.3326$.

Um outro exemplo

Considere um sistema de controle em malha fechada ilustrado na Figura 1 onde:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3},$$

e

$$H(s) = 1.$$

A função de transferência em malha aberta possui um par de pólos complexos conjugados em $-1 \pm j\sqrt{2}$. Determinar o lugar das raízes para este sistema.

Passo 1: Determinar o lugar das raízes no eixo real

Para qualquer ponto de teste no eixo real a contribuição dos pólos complexos conjugados é 360° (veja Figura 6). Ou seja, $\theta_1 + \theta_2 = 360^o$.

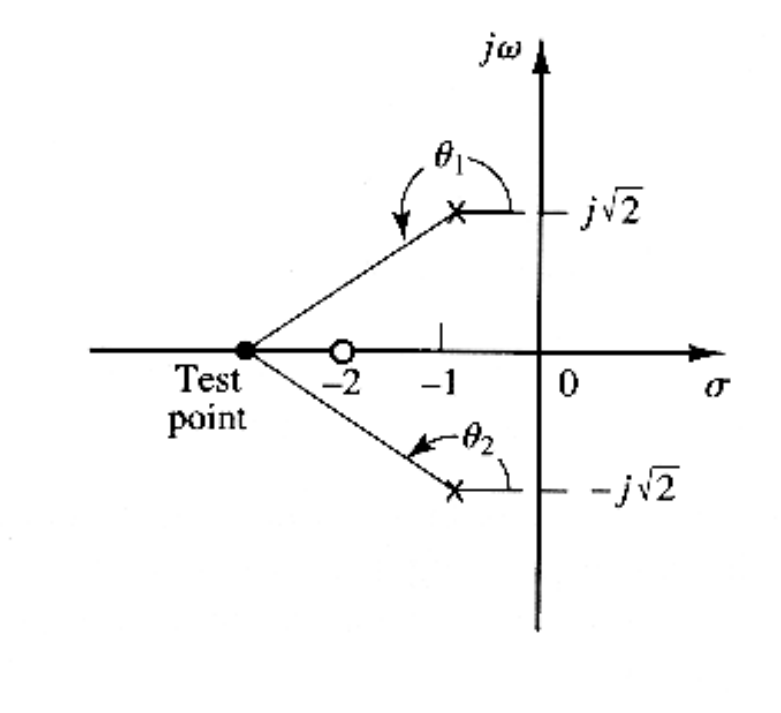

Figura 6: Determinação do lugar das raízes no eixo real.

Passo 1: ...

fácil verificar que o trecho no eixo real correspondente a $s = -\infty < \sigma < -2$ pertence ao lugar das raízes já que:

$$\begin{aligned}
\angle G(s) &= \angle\left(\frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}\right), \\
&= \angle(s+2) - \angle(s^2+2s+3), \\
&= \angle(s+2) - 360^o, \\
&= \pm 180^o(2k+1) \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Passo 2: Determinar o ângulo de partida

importante determinar neste caso, o ângulo de partida do lugar das raízes em relação ao par de pólos complexos conjugados.

Vamos supor um ponto de teste ao redor (muito próximo) de $s = -p_1$ (veja Figura 7).

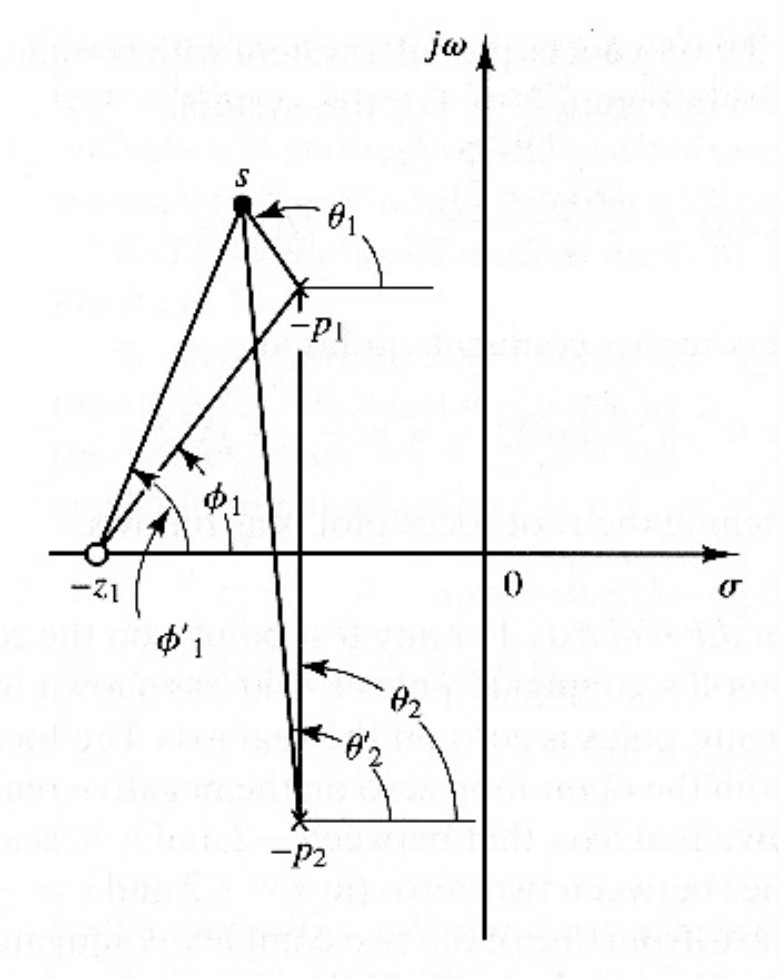

Figura 7: Determinação do ângulo de partida.

Passo2: ...

Se o ponto s pertence ao lugar das raízes, então deve satisfazer a condição de ângulo.

$$\phi_1' - (\theta_1 + \theta_2') = \pm 180^o(2k+1),$$

ou

$$\theta_1 = 180^o - \theta_2' + \phi_1' = 180^o - \theta_2 + \phi_1 .$$

Passo2: ...

Se o ponto s está na vizinhança de p_1 então podemos admitir que:

$$-\theta_2' + \phi_1' \approx -\theta_2 + \phi_1 .$$

Logo,

$$\theta_1 = 180^o - \theta_2 + \phi_1 \approx 180^o - 90^o + 55^o = 145^o .$$

Como o lugar das raízes é simétrico, o ângulo de partida em p_2 é -145°.

Passo 3: break-in point

Sabemos que o lugar das raízes deve se encontrar no eixo real num ponto correspodente a um pólo duplo.

Podemos resolver este problema podemos utilizar:

$$\frac{dK}{ds} = 0.$$

A equação característica do sistema é dada por:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3} = 0 \Rightarrow$$
$$K = -\frac{-(s^2 + 2s + 3)}{s+2}.$$

Passo 3: ...

Caculando a derivada obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{ds} &= -\frac{(2s+2)(s+2)-(s^2+2s+3)}{(s+2)^2} = 0 \Rightarrow \\
&= -\frac{2s^2+4s+2s+4-s^2-2s-3}{(s+2)^2} = 0 \Rightarrow \\
&= -\frac{s^2+4s+1}{(s+2)^2} = 0.
\end{aligned}$$

A equação característica é dada então por:

$$s^2 + 4s + 1 = 0.$$

As raízes são dadas por:

- $s = -3.732 \Rightarrow K = 5.4641$: pertence ao lugar das raízes.
- $s = -0.2680 \Rightarrow K = -1.4641$ não pertence ao lugar das raízes.

Então o ponto de chegada é dado por $s = -0.3732$.

Passo 4: Desenhe o lugar das raízes

Aqui, devemos testar vários pontos no plano s para tentar se determinar o lugar das raízes. Para este caso, entretanto, sabemos que o lugar das raízes na região dos pólos complexos conjugados descreve um círculo.

Para se derivar a equação do círculo vamos escrever inicialmente a condição do ângulo:

$$\angle(s+2) - \angle(s+1-j\sqrt{2}) - \angle(s+1+j\sqrt{2}) = \pm 180^o(2k+1).$$

Substituindo $s = \sigma + j\omega$ obtemos:

$$\begin{aligned} \angle(\sigma+2+j\omega) - \angle(\sigma+1+j\omega-j\sqrt{2}) - \\ \angle(\sigma+1+j\omega+j\sqrt{2}) = \\ \pm 180^o(2k+1). \end{aligned}$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \pm 180^{o}(2k+1).$$

ou

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)=$$
$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right)+\pm 180^{o}(2k+1).$$

Tomando a tangente de ambos os lados e utilizando a seguinte relação:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y},$$

obtemos:

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\right]=$$

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right)\pm 180^{o}(2k+1)\right].\Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)+\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)}{1-\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)}=\frac{\frac{\omega}{\sigma+2}\pm 0}{1\mp\frac{\omega}{\sigma+2}\times 0}\Rightarrow$$

$$\frac{2\omega(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2-(\omega^2-2)}=\frac{\omega}{\sigma+2}\Rightarrow$$

$$\omega\left[(\sigma+2)^2+\omega^2-3\right]=0$$

Desta forma:

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \text{ou} \\ (\sigma + 2)^2 + \omega^2 = (\sqrt{3})^2. \end{cases}$$

Obtemos portanto uma equação de um círculo de raio $(\sqrt{3})$ e centro em $(-2, 0)$. A Figura 8 ilustra o lugar das raízes resultante.

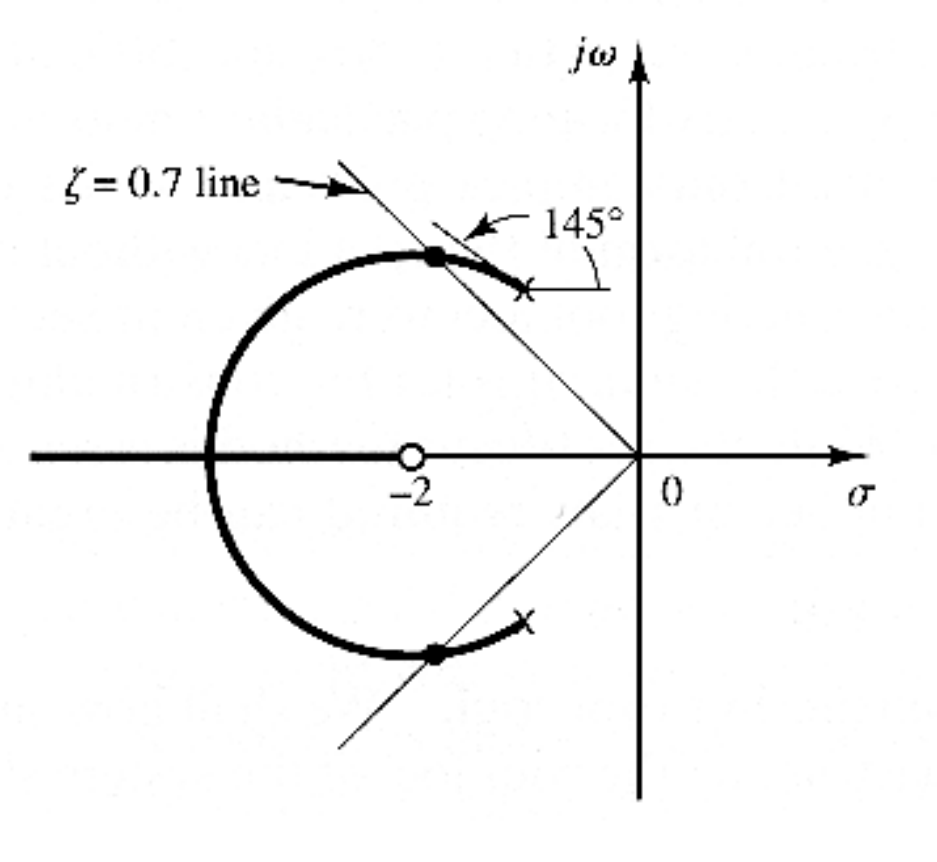

Figura 8: Lugar das raízes resultante.