PMR3404 Controle I
Aula 4

Resposta transitória

Ações de controle PID

Newton Maruyama

31 de março de 2017

PMR-EPUSP

Conteúdo

Resposta transitória

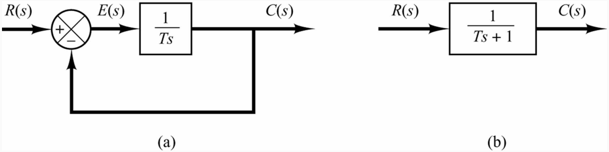


Figura 1: Sistema de 1a. ordem: malha aberta, malha fechada.

Resposta a entrada degrau

Figure 5-2 Exponential response curve.

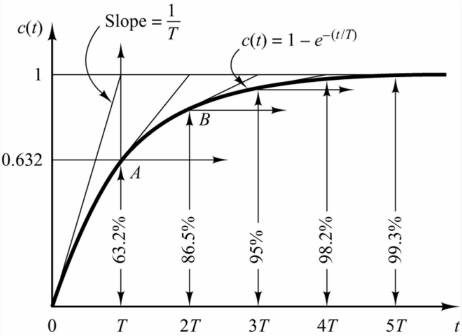


Figura 2: Sistema de 1a. ordem: resposta a degrau.

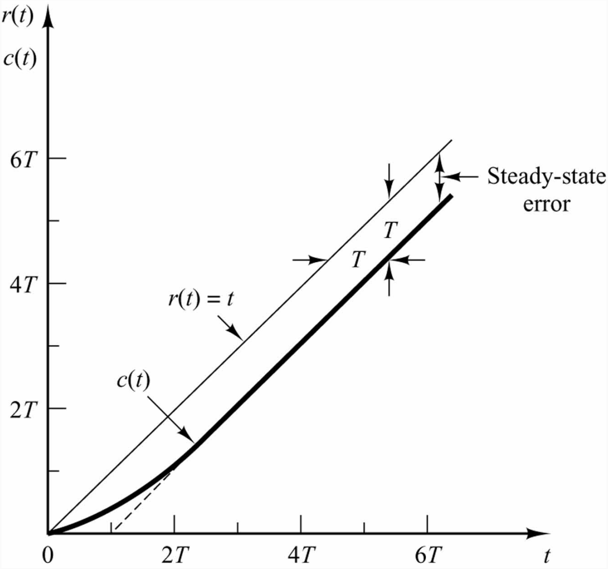


Figura 3: Sistema de 1a. ordem: resposta a rampa.

- Suponha o seguinte sistema de 2a. ordem:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}.$$

- Um sistema de controle em malha fechada com $G(s)$ (veja Figura 4) pode ser descrito como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n^2 s + \omega_n^2}.$$

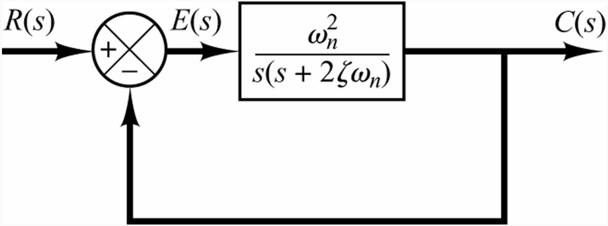


Figura 4: Sistema de 2a. ordem em malha fechada.

- Os pólos em malha fechada (veja Figura 5) são dados por:

$$s = -\sigma \pm j\omega_d,$$

  onde σ é a atenuação do sistema e ω_d é a freqüência natural amortecida.

- As seguintes relações podem ser definidas:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},$$

$$\sigma = \zeta\omega_n,$$

$$\cos\beta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \zeta.$$

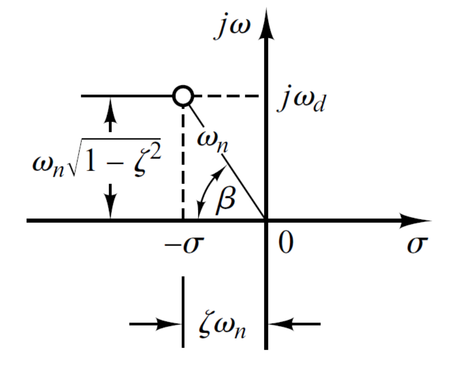


Figura 5: Pólos complexos e grandezas associadas.

- A resposta transitória deste sistema assume diferentes comportamentos de acordo com o valor do coeficiente de amortecimento ζ (veja Figura 6):

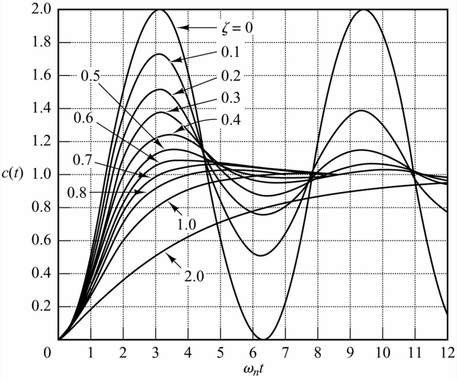


Figura 6: Resposta transitória a degrau em função de ζ.

Resposta a degrau

- **Sistema sub-amortecido** ($0 < \zeta < 1$):

$$y(t) = 1 - \frac{\exp^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), t \geq 0.$$

- **Sistema com amortecimento crítico** ($\zeta = 1$)**:**:

$$y(t) = 1 - \exp^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), t \geq 0.$$

- **Sistema superamortecido** ($\zeta > 1$**):**

$$\begin{aligned} y(t) = 1 + & \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})} \exp^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - \\ & \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})} \exp^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}, t \geq 0. \end{aligned}$$

- Para este sistema de 2a. ordem é possível estabelecer uma relação entre as grandezas que especificam a resposta transitória a degrau e os pólos do sistema.
- A resposta transitória a degrau para este sistema (veja Figura **??**) pode ser caracterizado pelas seguintes grandezas:

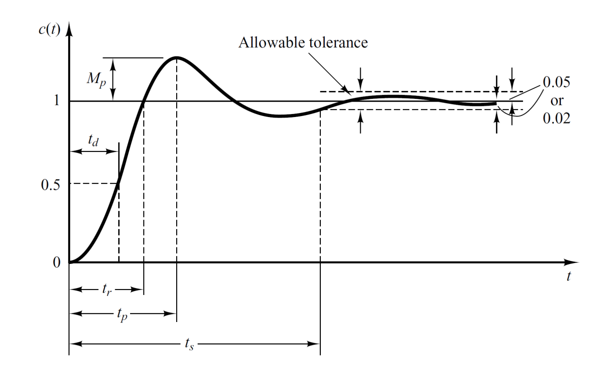
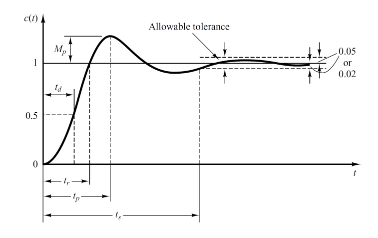


Figura 7: Resposta transitória do sistema de segunda ordem e suas grandezas características.

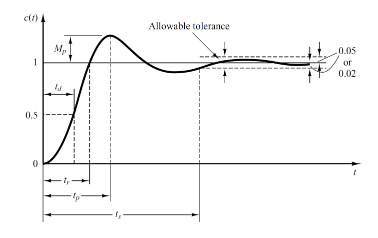
- O tempo de subida t_r é aqui definido como o tempo que o sistema demora para subir de 0 e 100% do valor final:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}.$$



- O instante do pico t_p se refere ao instante da ocorrência do primeiro pico do sobresinal:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}.$$

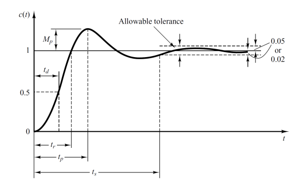


- O máximo sobresinal é definido da seguinte forma:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%,$$

- e pode ser calculado da seguinte forma:

$$M_p = \exp^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}.$$

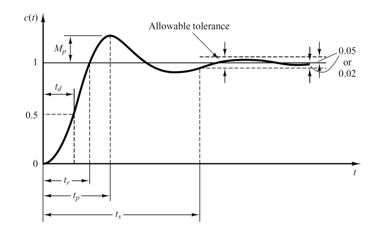


- O tempo de acomodação t_s é definido como o instante de tempo tal que o sinal de erro passa a ser menor que um determinado valor percentual, em geral, definido como 2% ou 5%.
- O tempo de acomodação t_s é em geral aproximado através das seguintes equações:
  - Critério de 2%:

$$\boxed{t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}}. \tag{1}$$

  - Critério de 5%:

$$\boxed{t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}}.$$



- Estas aproximações podem fornecer erros significativos como pode ser observado na Figura 8 que ilustra a variação de t_s em função de ζ.

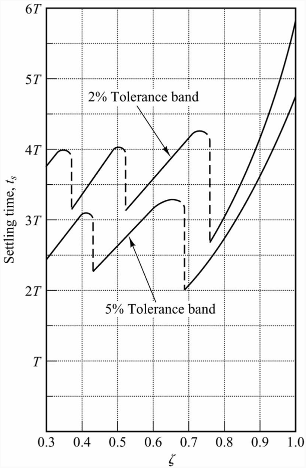


Figura 8: Tempo de acomodação t_s em função de ζ.

- Podemos observar que o tempo de acomodação t_s varia de forma discontínua. Para o critério de 2%, por exemplo, t_s varia aproximadamente da seguinte forma:
  - $3T < t_s < 4T$ para $0.3 < \zeta < 0.7$,
  - $3T < t_s < 6T$ para $0.7 < \zeta < 1.0$.

Lugares geométricos

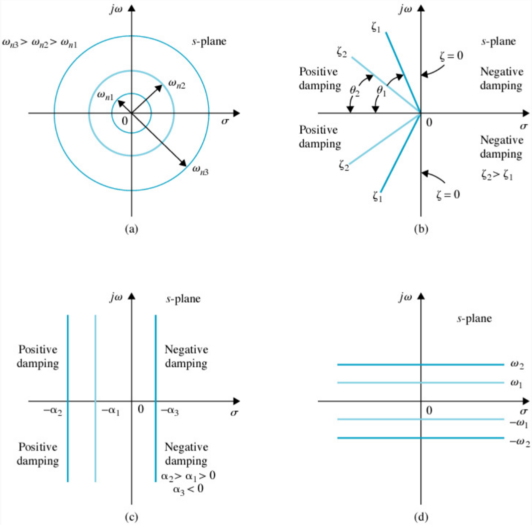


Figura 9: (a) Lugar geométrico para $\omega_n = cte$ - (b) Lugar geométrico para $\zeta = cte$ - (c) Lugar geométrico para $\sigma = cte$ - (d) Lugar geométrico para $\omega_d = cte$.

Tempo de Subida t_r

O tempo de subida t_r não possui um lugar geométrico trivial, mas é usualmente aproximado por:

$$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n}. \tag{2}$$

Ou seja, o tempo de subida t_r é inversamente proporcional a freqüência natural não amortecida ω_n. Entretanto esta equação é bastante aproximada mesmo para sistemas de 2a. ordem sem zeros.

Estimativas mais precisas - University of Illinois

- Máximo sobresinal:

$$M_p = \exp^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \quad \zeta > 1 \tag{3}$$

- Tempo de subida:

$$t_r = (1.2 - 0.45\zeta + 2.6\zeta^2) \quad \zeta < 1.2 \tag{4}$$

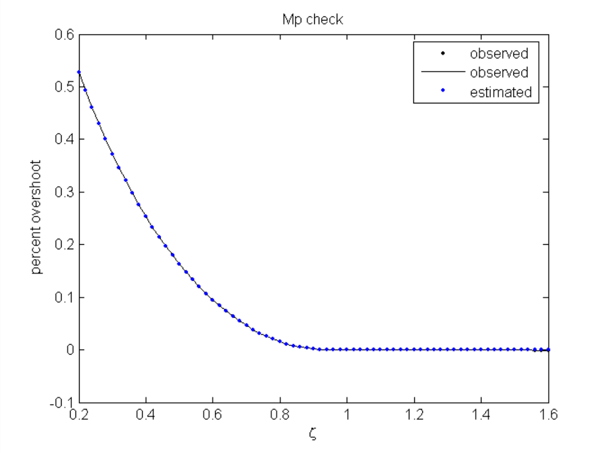
$$t_r = (4.7\zeta - 1.2)/\omega_n \quad \zeta > 1.2 \tag{5}$$

- Tempo de acomodação

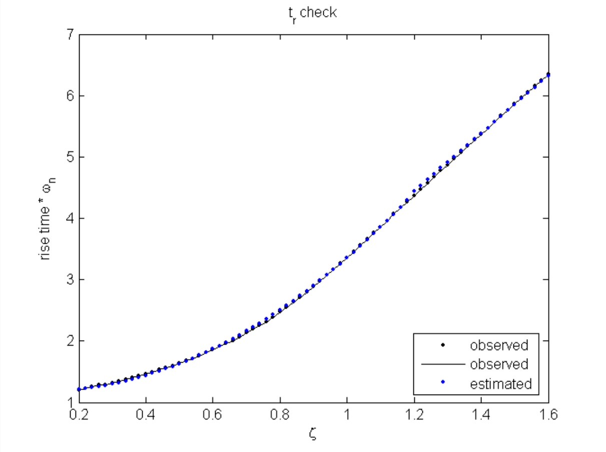
$$t_s = -0.5\log((1-\zeta^2)/400))/(\zeta\omega_n) \quad \zeta < 0.7 \tag{6}$$

$$t_s = (6.6\zeta - 1.6)/\omega_n \quad \zeta > 0.7 \tag{7}$$

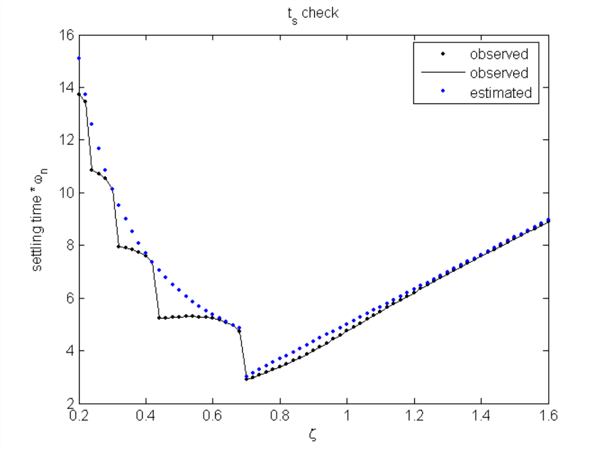
Estimativa M_p



Estimativa t_r



Estimativa t_s



Resposta transitória: sistema padrão de 2a. ordem

Sistema padrão de 2a. ordem

-

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)} \tag{8}$$

$$H(s) = K_p \tag{9}$$

-

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K_p}{s^2+4s+K_p} \tag{10}$$

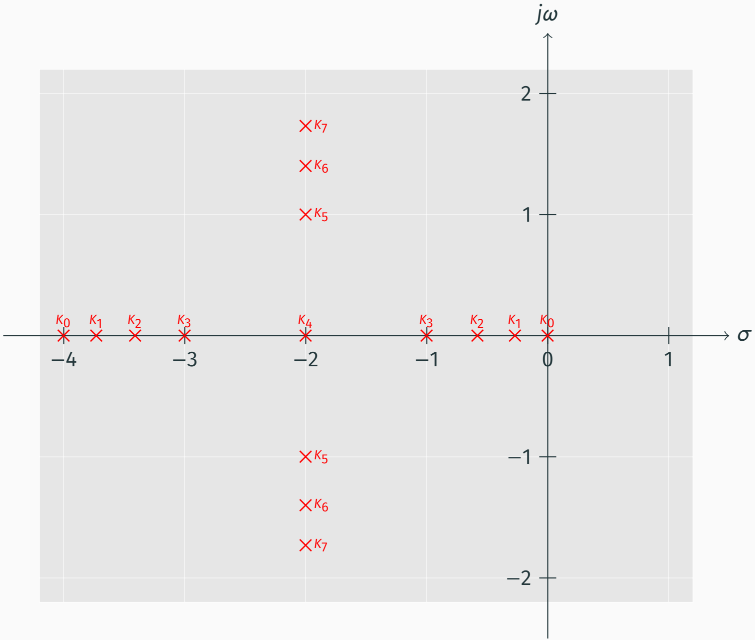
- Equação característica depende de K_p:

$$1 + G(s)H(s) = s^2 + 4s + K_p \tag{11}$$

Variação do sistema de malha fechada em função de K_p

K_p	p_1	p_2	$\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$
0	0.00	-4.00	
1.0	-0.27	-3.73	$\frac{1.0}{s^2+4s+1}$
2.0	-3.41	-0.58	$\frac{2}{s^2+4s+2}$
3.0	-1.00	-3.00	$\frac{3}{s^2+4s+3}$
4.0	-2.00	-2.00	$\frac{4}{s^2+4s+4}$
5.0	-2.00+j1.00	-2.00-j1.00	$\frac{5}{s^2+4s+5}$
6.0	-2.00+j1.40	-2.00-j1.40	$\frac{6}{s^2+4s+6}$
7.0	-2.00+j1.73	-2.00-j1.73	$\frac{7}{s^2+4s+7}$
20.0	-2.00+j4.00	-2.00-j4.00	$\frac{20}{s^2+4s+20}$
50.0	-2.00+j6.78	-2.00-j6.78	$\frac{50}{s^2+4s+50}$

Variação dos pólos em função de K_p

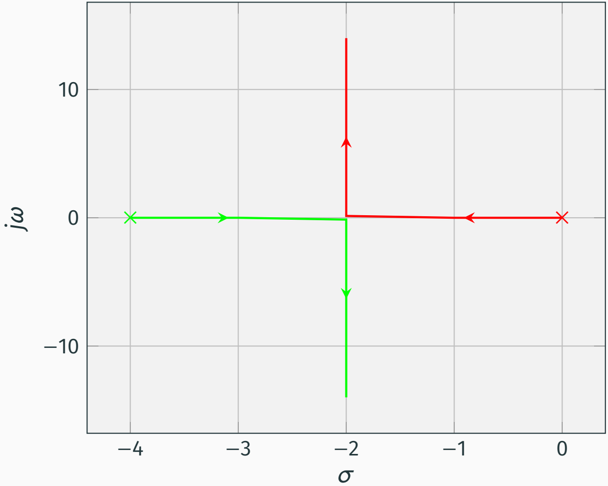


- A equação característica depende de K_p:

$$1 + G(s)H = s^2 + 4s + K_p \tag{12}$$

- Cada valor de K_p define um sistema diferente com pares de pólos específicos (p_1, p_2).
- O lugar geométrico de todos os pólos (p_1, p_2) obtidos com o valor de $0 \leq K_p \leq \infty$ compõem um lugar geométrico denominado lugar das raízes.

Lugar das raízes



Resposta no domínio do tempo para diferentes valores de K_p

- Sistema se torna mais rápido e mais oscilatório com o aumento do valor de K_p.