Q1: _____

Q2: _____

Q3: _____

Nota: _____

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

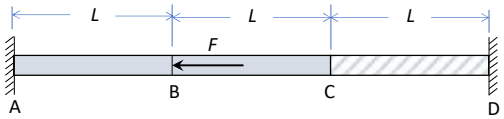
PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – PSUB – 26/06/2019

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,0 pontos)



A barra ABCD da figura é uma barra prismática com seção transversal de área *S* e está engastada em A e em D. O trecho ABC é formado por um material de módulo de elasticidade E e o trecho CD é formado por um material de módulo de elasticidade $\frac{3}{2}E$. Ao ponto B está aplicada uma força horizontal de magnitude *F*. Pede-se calcular as reações em A e em D.

Solução:

i) DCL:

ii) Equação de equilíbrio:

$$R_A + R_D = F$$

(0,5)

iii) Compatibilidade de deslocamentos:

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = 0$$

(0,5)

iv) Relações entre forças normais e deslocamentos:

$$\delta_{AB} = \frac{N_{AB}L}{ES} = -\frac{R_A L}{ES}$$

$$\delta_{BC} = \frac{N_{BC}L}{ES} = -\frac{(R_A - F)L}{ES}$$

$$\delta_{CD} = -\frac{2N_{CD}L}{3ES} = -\frac{2(R_A - F)L}{3ES}$$

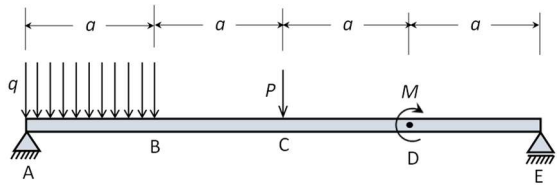
(1,0)

v) Resolução do sistema de equações:

$$R_A = \frac{5F}{8}; \qquad R_B = \frac{3F}{8}$$

(1,0)

2ª Questão (3,0 pontos)



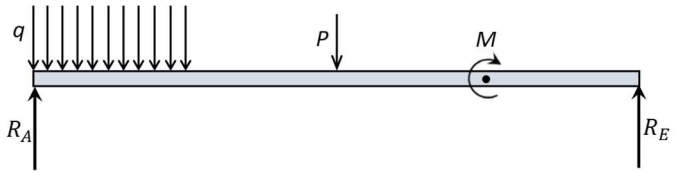
A viga ABCDE da figura é uma viga prismática biapoiada. Ao trecho AB está aplicada uma força distribuída uniforme de magnitude *q*, ao ponto C está aplicada uma força vertical de magnitude *P* e ao ponto *D* está aplicado um binário de magnitude *M*. Pedem-se:

a) as reações em A e em E;
b) o diagrama de força cortante;
c) o diagrama de momento fletor.

Dados: $a = 4m;\ q = 2kN/m;\ P = 6kN;\ M = 32kN.m$

<u>Solução</u>:

a) DCL:



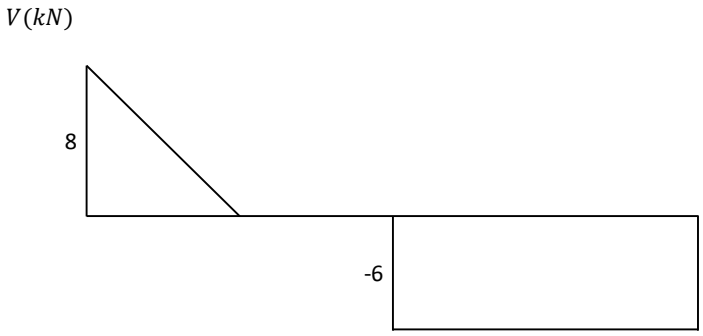
Resolvendo o sistema de equações de equilíbrio:

$$R_A = \frac{7qa}{8} + \frac{P}{2} - \frac{M}{4a} = 8kN$$

$$R_E = \frac{qa}{8} + \frac{P}{2} + \frac{M}{4a} = 6kN$$

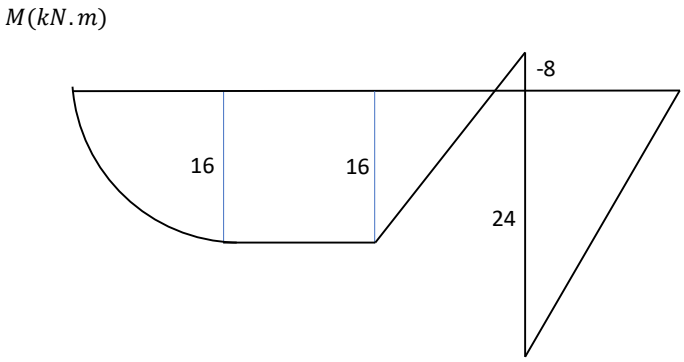
(1,0)

b) Diagrama de força cortante:



(1,0)

c) Diagrama de momento fletor (desenhando do lado tracionado da viga):



(1,0)

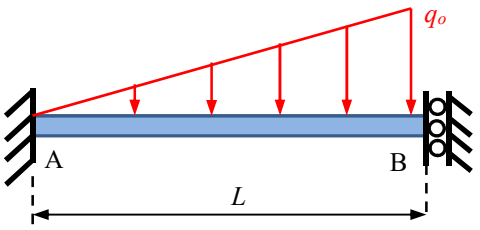
3ª Questão (4,0 pontos)

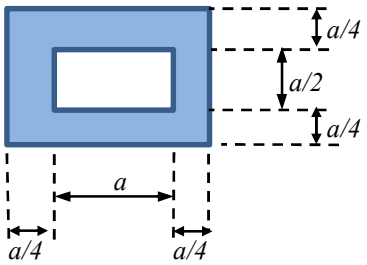
A viga AB indicada na figura abaixo possui seção transversal prismática com rigidez flexional *EI* (constante), comprimento total *L*, e suporta um carregamento linearmente distribuído com intensidade máxima q_o na extremidade B. Pede-se determinar na ordem indicada:

a) o deslocamento transversal da extremidade B;

b) os diagramas de momentos fletores e forças cortantes, indicando seus valores máximos e as posições em que ocorrem;

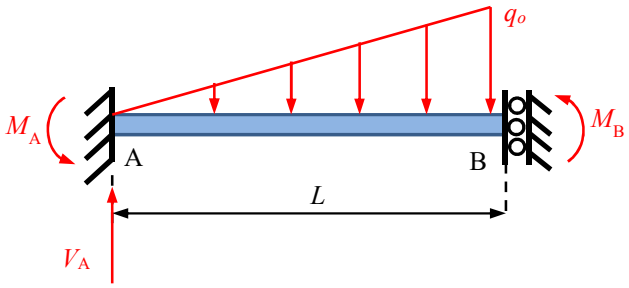
c) considerando que a seção transversal seja como a indicada na figura à direita, determine a máxima tensão normal devida à flexão para o carregamento indicado.





Solução:

a) Desprezando a ação dos esforços horizontais sobre a viga (de pequena magnitude, desde que a hipótese de linearidade geométrica seja válida), teremos três reações sobre a viga, como indica o D.C.L. abaixo:



Temos portanto: $g = 3 - 2 = 1$, ou seja, uma estrutura hiperestática com 1 grau de hiperestaticidade. Desta forma, não é possível determinar todas as reações vinculares e/ou todos os esforços solicitantes internos apenas com a aplicação das equações de equilíbrio estático. Contudo, o uso da equação da linha elástica, com a aplicação das condições de contorno corretas, nos permite resolver o problema de forma simples. Aplicando inicialmente as duas equações de equilíbrio estático disponíveis, teremos:

0,5 pto

$$V_A = \frac{q_o L}{2}$$

$$M_A + M_B = \frac{q_o L}{2} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{q_o L^2}{3}$$

Utilizando a equação da linha elástica (optamos, aqui, por utilizar a E.D.O. de ordem 2, ao invés da de ordem 4, mas as duas opções são possíveis):

0,5 pto

$$EIv''(x) = M(x) = V_A x - M_A - \left(\frac{q_o x}{L}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$EIv''(x) = -\frac{q_o x^3}{6L} + \frac{q_o L}{2} x - M_A$$

Integrando a E.D.O uma primeira vez, virá:

$$EIv'(x) = -\frac{q_o x^4}{24L} + \frac{q_o L}{4} x^2 - M_A x + C_1$$

Integrando uma segunda vez, virá:

0,5 pto

$$EIv(x) = -\frac{q_o x^5}{120L} + \frac{q_o L}{12}x^3 - \frac{M_A x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Aplicando as condições de contorno essenciais (geométricas) em $x = 0$, virá:

$$v(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 0$$

E

$$v'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 0$$

Finalmente, como o vínculo em B não permite a rotação desta extremidade, teremos:

$$v'(L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{q_o L^3}{24} + \frac{q_o L^3}{4} - M_A L = 0$$

Ou seja:

$$M_A = \frac{5q_o L^2}{24}$$

O sinal positivo obtido indica que o sentido arbitrado para M_A no D.C.L. está correto. Obtemos, assim:

$$v(x) = \frac{q_o}{EI}\left[-\frac{x^5}{120L} + \frac{Lx^3}{12} - \frac{5L^2x^2}{48}\right]$$

Daí:

0,5 pto

$$v(L) = -\frac{7}{240}\frac{q_o L^4}{EI}$$

O sinal negativo indica que o deslocamento transversal da extremidade B é contrário ao eixo positivo *y* (como era esperado).

b) Os esforços solicitantes (força cortante e momento fletor) na viga ficam dados por:

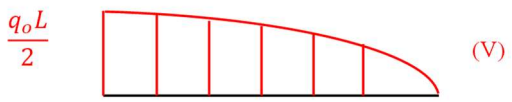
$$M(x) = -\frac{q_o x^3}{6L} + \frac{q_o L}{2}x - \frac{5q_o L^2}{24}$$

E

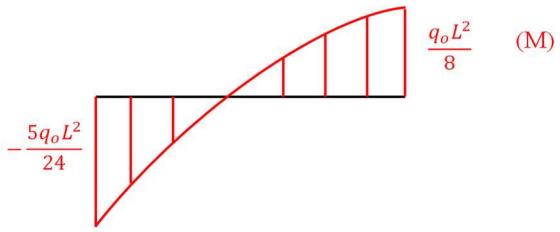
$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -\frac{q_o x^2}{2L} + \frac{q_o L}{2}$$

E os diagramas resultam:

1,0 pto



E



De modo que:

$$|V_{máx}| = \frac{q_o L}{2} \quad (em\ A) \quad e \quad |M_{máx}| = \frac{5q_o L^2}{24} \quad (em\ A)$$

c) A máxima tensão normal devida a flexão irá ocorrer nas fibras extremas (ou seja, mais afastadas da linha neutra) da seção transversal A, valendo:

$$|\sigma_{x,máx}| = \frac{|M_{máx}|}{S}\ , \qquad onde:\ \ S = \frac{I_z}{|y_{máx}|}$$

No caso:

$$I_z = \frac{\left(\frac{3a}{2}\right).(a)^3}{12} - \frac{a.\left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} = \frac{11}{96}a^4$$

E

$$|y_{máx}| = \frac{a}{2}$$

Logo:

$$S = \frac{11}{48}a^3$$

e

$$|\sigma_{x,máx}| = \frac{5q_oL^2}{24}.\frac{48}{11a^3} = \frac{10}{11}\frac{q_oL^2}{a^3}$$

1,0 pto