



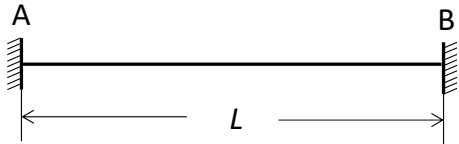
PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – P1 – 28/03/2019

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

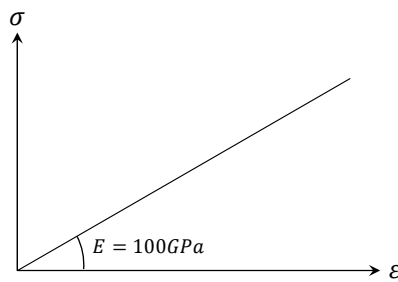
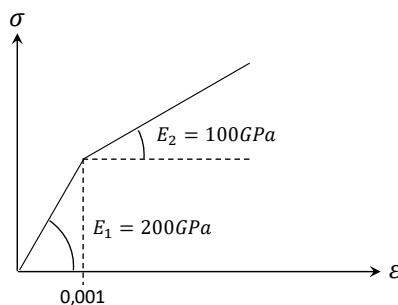
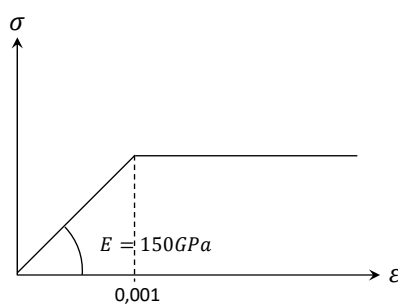
Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,0 pontos)



A área da seção transversal de um arame é $A = 4\text{mm}^2$ e seu comprimento indeformado é $L_0 = 100\text{mm}$. Esse arame é esticado para ser preso aos pontos A e B cuja distância é $L = 100,2\text{mm}$. Pede-se determinar a força necessária para esticar o arame, para os três materiais indicados abaixo.

(Resolver a questão nos espaços indicados. O rascunho pode ser feito no verso, mas não será considerado para a nota)

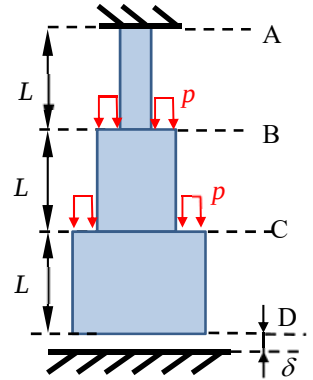
a) Material elástico linear 	Resolução: $\varepsilon = \frac{L - L_0}{L} = 0,002$ $F = EA\varepsilon = 800\text{N}$ (1,0)
b) Material elástico bilinear 	Resolução: Seja ε_1 o valor da deformação a partir do qual há mudança no módulo de elasticidade. Como $\varepsilon = 0,002 > \varepsilon_1$, então: $F = E_1 A \varepsilon_1 + E_2 A (\varepsilon - \varepsilon_1)$ $F = 800 + 400 = 1200\text{N}$ (1,0)
c) Material elastoplástico perfeito 	Resolução: Seja ε_y o valor da deformação em que inicia o patamar de escoamento. Como $\varepsilon = 0,002 > \varepsilon_y$, então: $F = EA\varepsilon_y = 600\text{N}$ (1,0)



2ª Questão (3,5 pontos)

A barra ABCD indicada na figura ao lado é formada por três trechos de seções circulares (todas maciças) de diâmetros: d (no trecho AB), $\sqrt{2}d$ (no trecho BC) e $\sqrt{3}d$ (no trecho CD). Os comprimentos de cada trecho são iguais a L e os centroides de todas as seções encontram-se alinhados sobre o mesmo eixo vertical. Sobre as áreas anulares existentes em cada patamar onde há mudança de seção transversal é aplicada uma pressão uniforme de intensidade p . Admita que o peso próprio do material possa ser desprezado e que uma folga δ ($\delta \ll L$) exista entre a face inferior da barra CD e o solo (suposto rígido) antes da aplicação do carregamento. Considere por fim que o material tenha comportamento elástico-linear com módulo de elasticidade E . Determine:

- O valor da pressão $p = p_o$ necessária para vencer a folga δ ;
- As reações de apoio (em A e em D) ao aplicarmos uma pressão $p = 2p_o$ sobre os dois patamares.



Solução:

- Designemos os trechos CD, BC e AB, respectivamente, por trechos 1, 2 e 3. As forças normais (internas) nestes três trechos após a aplicação integral da pressão p_o necessária para vencer a folga δ serão:

$$N_{CD} = N_1 = 0$$

$$N_{BC} = N_2 = p_o \frac{\pi}{4} (3 - 2)d^2 = p_o \frac{\pi}{4} d^2$$

$$N_{AB} = N_3 = p_o \frac{\pi}{4} d^2 + p_o \frac{\pi}{4} (2 - 1)d^2 = p_o \frac{\pi}{2} d^2$$

Assim:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{N_1 L}{EA_1} + \frac{N_2 L}{EA_2} + \frac{N_3 L}{EA_3} \\ \delta &= \frac{0 \cdot L}{E \left(\frac{\pi 3 d^2}{4} \right)} + \frac{p_o \frac{\pi}{4} d^2 L}{E \left(\frac{\pi 2 d^2}{4} \right)} + \frac{p_o \frac{\pi}{2} d^2 L}{E \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)} \\ \delta &= \frac{p_o L}{2E} + \frac{2p_o L}{E} = \frac{5p_o L}{2E} \end{aligned}$$

Logo:

$$p_o = \frac{2}{5} \left(\frac{\delta}{L} \right) E$$

1,5 ponto

- A pressão total aplicada $p = 2p_o$ será dividida em duas parcelas: uma parcela inicial (p_o) que é a necessária para vencer a folga e que leva aos seguintes valores das reações em A e em D:

$$R_{A1} = p_o \frac{\pi}{4} (3 - 2)d^2 + p_o \frac{\pi}{4} (2 - 1)d^2 = p_o \frac{\pi}{2} d^2$$

$$R_{D1} = 0$$

Onde R_{A1} está dirigida verticalmente para cima

A segunda parcela, $\Delta p = 2p_o - p_o = p_o$, está associada à solução de uma estrutura hiperestática (com grau de hiperestaticidade $g = 1$), já que, agora, a folga foi totalmente vencida e o acréscimo de pressão (Δp) levará a reações não-nulas tanto em A quanto em D. As equações necessárias serão:



Equação de equilíbrio de forças:

$$R_{A2} + R_{D2} = \Delta p \frac{\pi}{4} (3 - 2)d^2 + \Delta p \frac{\pi}{4} (2 - 1)d^2 = \Delta p \frac{\pi}{2} d^2 = p_o \frac{\pi}{2} d^2$$

Onde as reações R_{A2} e R_{D2} estão dirigidas verticalmente para cima.

Equação de compatibilidade de deslocamentos:

$$\frac{N_1 L}{EA_1} + \frac{N_2 L}{EA_2} + \frac{N_3 L}{EA_3} = 0$$

Onde, por equilíbrio de forças em cada segmento, obtemos os seguintes esforços internos:

$$N_1 = -R_{D2}$$

$$N_2 = -R_{D2} + \Delta p \frac{\pi}{4} d^2$$

$$N_3 = -R_{D2} + \Delta p \frac{\pi}{2} d^2$$

Substituindo os valores dos esforços internos a equação de compatibilidade de deslocamentos:

$$-\frac{R_{D2}}{3} + \frac{1}{2} \left(-R_{D2} + \Delta p \frac{\pi}{4} d^2 \right) + \left(-R_{D2} + \Delta p \frac{\pi}{2} d^2 \right) = 0$$

Resultando:

$$R_{D2} = \frac{15\pi\Delta p d^2}{44}$$

Logo, da equação de equilíbrio de forças:

$$R_{A2} + \frac{15\pi\Delta p d^2}{44} = p_o \frac{\pi}{2} d^2 \Leftrightarrow R_{A2} = \frac{7\pi\Delta p d^2}{44}$$

Finalmente, como $\Delta p = p_o$, teremos, pela superposição:

2,0 pontos

$$R_A = R_{A1} + R_{A2} = \frac{29\pi p_o d^2}{44}$$

$$R_D = R_{D1} + R_{D2} = \frac{15\pi p_o d^2}{44}$$

Observação: Alternativamente, o item (b) poderia ser resolvido diretamente com a aplicação da equação de equilíbrio de forças e a equação de compatibilidade de deslocamentos, resultando:

$$R_A + R_D = p_f \frac{\pi}{4} (3 - 2)d^2 + p_f \frac{\pi}{4} (2 - 1)d^2 = p_f \frac{\pi}{2} d^2 = p_o \pi d^2$$

$$\frac{N_1 L}{EA_1} + \frac{N_2 L}{EA_2} + \frac{N_3 L}{EA_3} = \delta = \frac{5p_o L}{2E}$$

Da 2ª equação, resulta:

$$\frac{(-R_D) \cdot L}{E \left(\frac{\pi 3 d^2}{4} \right)} + \frac{\left(-R_D + p_f \frac{\pi}{4} d^2 \right) L}{E \left(\frac{\pi 2 d^2}{4} \right)} + \frac{\left(-R_D + p_f \frac{\pi}{2} d^2 \right) L}{E \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)} = \frac{5p_o L}{2E}$$

Substituindo $p_f = 2p_o$, encontramos diretamente:

$$R_D = \frac{15\pi p_o d^2}{44} \quad e \quad R_A = \frac{29\pi p_o d^2}{44}$$



3ª Questão (3,5 pontos)

A estrutura indicada na figura abaixo é formada pelos tubos AB (aço) e CD (alumínio). Considere que a extremidade A esteja engastada e que um torque de intensidade T seja aplicado sobre a extremidade D do tubo CD. Admita que os materiais possuam comportamento elástico-linear. A união entre os tubos AB e CD é feita através de uma luva (suposta indeformável) e um total de 16 pinos de diâmetro $d = 10$ mm, igualmente espaçados a ângulos de 45° , conforme ilustrado na figura (detalhe à direita). A tensão admissível ao cisalhamento dos pinos é $\tau_{adm,3} = 50$ MPa e as tensões admissíveis para os tubos estão indicadas abaixo. Pede-se:

- O valor do máximo momento de torção ($T_{m\acute{a}x}$) a ser aplicado na seção D de tal forma que nenhuma das tensões admissíveis seja ultrapassada;
- O ângulo de giro da seção D (em relação à seção A) para um torque $T = 1,20$ kN.m.

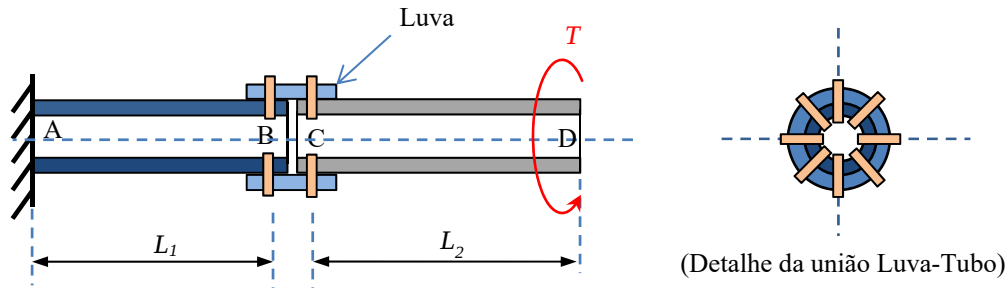
Dados dos tubos:

Tubo AB: $d_{int} = 98$ mm, $d_{ext} = 102$ mm, $L_{AB} = L_1 = 1000$ mm, material: aço ($G_1 = 80$ GPa, $\tau_{adm,1} = 120$ MPa)

Tubo CD: $d_{int} = 98$ mm, $d_{ext} = 102$ mm, $L_{BC} = L_2 = 1350$ mm, material: alumínio ($G_2 = 27$ GPa, $\tau_{adm,2} = 60$ MPa)

Momento polar de inércia para tubos de parede fina: $I_p \cong 2\pi R_m^3 t$

Obs: Adote, sempre que necessário, a aproximação: $\pi \cong 3$.



Solução:

a) Devemos ter:

No tubo AB (aço):

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T d_{ext}}{I_p} \leq \tau_{adm,1} \Leftrightarrow T \leq \frac{2\tau_{adm,1} I_p}{d_{ext}}$$

No tubo CD (alumínio):

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T d_{ext}}{I_p} \leq \tau_{adm,2} \Leftrightarrow T \leq \frac{2\tau_{adm,2} I_p}{d_{ext}}$$

Como os dois tubos possuem as mesmas dimensões, e como $\tau_{adm,2} < \tau_{adm,1}$, as duas inequações acima se reduzem apenas a:

$$T \leq \frac{2\tau_{adm,2} I_p}{d_{ext}} = \frac{4\pi\tau_{adm,2} R_m^3 t}{d_{ext}} \cong \frac{12 \cdot 60 \cdot (50)^3 \cdot 2}{102} \text{ Nmm} \cong 1765 \text{ Nm}$$

Falta ainda determinar o torque máximo para que não haja cisalhamento dos pinos. Neste caso:

$$T \leq 8 \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) \tau_{adm,3} \left(\frac{d_{ext}}{2} \right) = \tau_{adm,3} (\pi d^2) d_{ext} \cong 50 \cdot (3 \cdot 10^2) \cdot 102 \text{ Nmm} \cong 1530 \text{ Nm}$$

Logo:

$$T_{m\acute{a}x} = \min\{1765 \text{ Nm}, 1530 \text{ Nm}\} = 1530 \text{ Nm}$$

2,5 pontos

Caso o valor acima seja ultrapassado, a falha ocorrerá pelo cisalhamento dos pinos.



b) O ângulo de giro da seção D (em relação à seção A) para um torque $T = 1,20 \text{ kN.m}$ será:

$$\varphi = \frac{T \cdot L_2}{G_2 \cdot I_{p,2}} + \frac{T \cdot L_1}{G_1 \cdot I_{p,1}} = \frac{T}{2\pi R_m^3 t} \left(\frac{L_2}{G_2} + \frac{L_1}{G_1} \right)$$

Numericamente:

$$\varphi \cong \frac{1,20 \cdot 10^6}{6(50)^3 2} \left(\frac{1350}{27000} + \frac{1000}{80000} \right)$$

$$\varphi \cong \frac{1,20}{6.125.2} \left(\frac{1350}{27} + \frac{1000}{80} \right)$$

$$\varphi \cong \frac{75}{6.250} \cong 0,05 \text{ rad}$$

1,0 ponto