



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

---

**PEF 2308 – Fundamentos de Mecânica das Estruturas**

**Material Didático –  
ListaP1b, exercícios 9,  
10 e 11**

18/06/2004

Professor: Osvaldo Nakao

Joice Toyota 3731450

Rodrigo Cruz 3316428

## 1. Introdução – Método de Análise de estruturas tridimensionais

O método usado para calcular os esforços solicitantes em uma figura tridimensional consiste em:

- 1)Aplicar o teorema do corte em seções convenientes;
- 2)A partir de uma extremidade determinar os esforços na primeira seção;
- 2)Transferir os momentos e as forças normais de uma seção para outra;
- 3)Transferir as forças cortantes e impor os momentos gerados pelas transferências dessas forças;
- 4)Não esquecer dos momentos e das forças gerados na seção devido aos esforços existentes entre as seções.

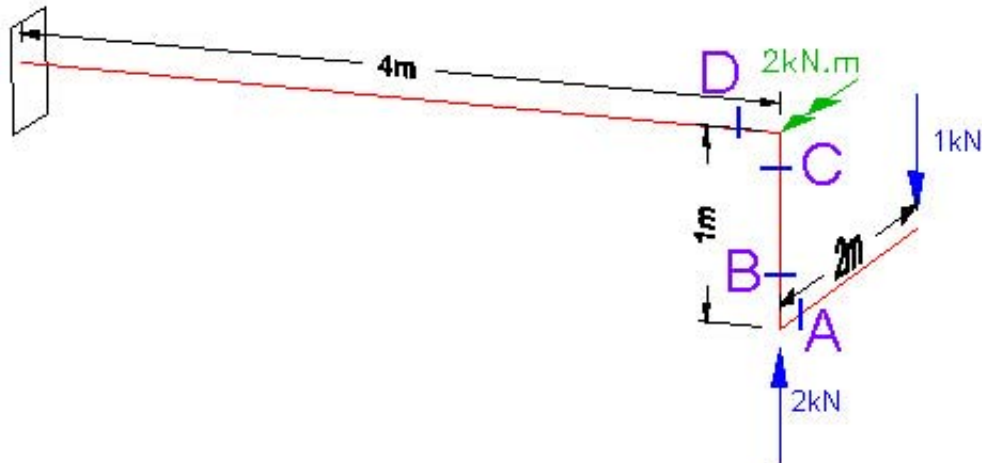
Para determinar os acréscimos de momentos e forças em uma seção:

- 1)Forças que estão sendo aplicadas em uma seção são transferidas integralmente de uma seção para outra (módulo, direção e sentido);
- 2)Quando se transfere a força cortante de uma seção para outra, se adiciona um momento obtido pelo produto vetorial da força pela distância;
- 3)Forças (ou momentos) atuantes entre as seções devem ser transferidos para a próxima seção, acompanhadas dos respectivos momentos adicionais gerados, se existentes. Quando a força é concentrada, sua transferência (da força com a geração de momento) deve ser realizada conforme descrito anteriormente. Para força uniformemente distribuída a sua resultante (obtida pela integral ou área) é aplicada no meio da barra. Para forças distribuídas linearmente variadas (uniformemente variadas) a sua resultante (obtida pela integral ou área) é aplicada a 2/3 da extremidade onde a força é menor.

Resumo dos efeitos de forças distribuídas:

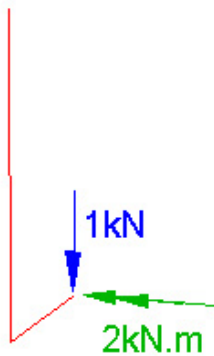
- 1)A força atuante na próxima seção é dada pela resultante das forças.
- 2)Força distribuída uniforme por comprimento de valor  $p$  numa barra de comprimento  $l$ , contribui com um momento dado por  $p \cdot l \cdot l / 2 = p \cdot l^2 / 2$  na próxima seção e provoca momentos com distribuição parabólica na barra onde está sendo aplicada. Neste caso, a distribuição de forças cortantes nesta barra será uma função linear.
- 3) Forças distribuídas linearmente variadas (uniformemente variadas) de zero a  $p$  provocam momentos com distribuição em forma de um polinômio de terceiro grau na barra onde estão sendo aplicadas. Neste caso, a distribuição de forças cortantes nessa barra será uma função do segundo grau.

## Questão 9



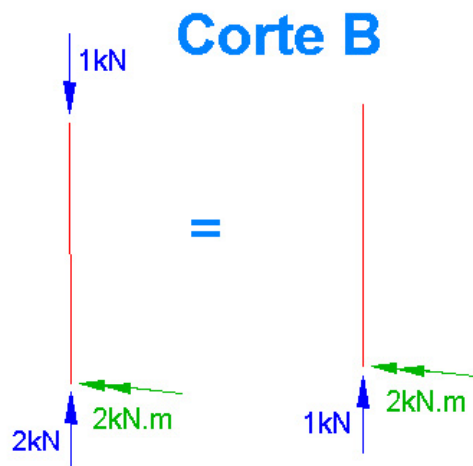
O primeiro passo é cortar a estrutura em seções convenientes de forma a auxiliar a análise. Sugere-se no início e no fim de cada segmento de barra, ou seja, quando há mudança na direção.

### Corte A

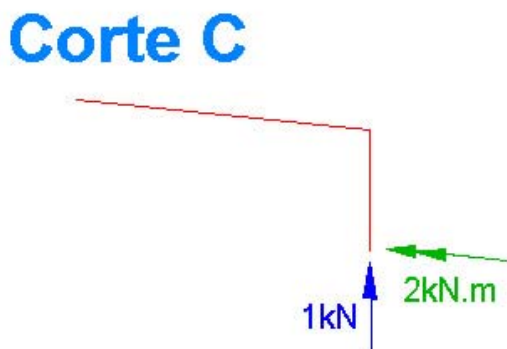


Análise da seção A:

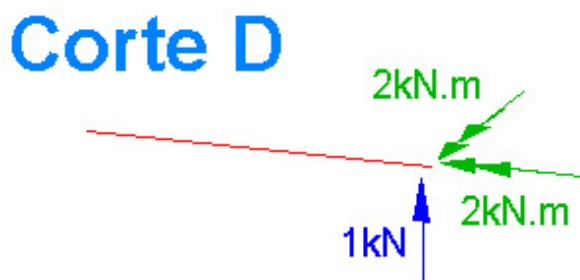
A força de 1kN aplicada na extremidade deve ser transferida para a seção A acompanhada (do acréscimo) de um momento dado por:  
 $F \cdot D = 1\text{kN} \cdot 2\text{m} = 2\text{kN.m}$



Análise da seção B:  
 A força de módulo 1 kN aplicada em A é transferida para seção B. O momento em A também é transferido para B. Tem-se ainda a força de módulo 2kN que é aplicada entre A e B, resultando numa força normal de 1kN em B.

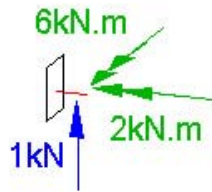


Análise da seção C:  
 A força de módulo 1kN aplicada em B é transferida para seção C sem criar nenhum momento (F e D tem a mesma direção). O momento em B também é transferido para C. Observe que o momento de 2kNm que é aplicada entre C e D não é computado em C pois os esforços caminham para os apoios.



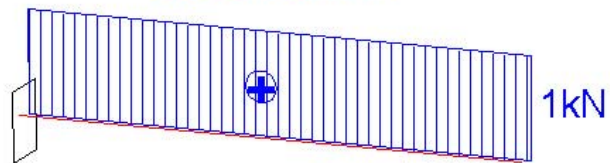
Análise da seção D:  
 Em D tem-se os momentos e as forças atuantes em C mais o momento de 2kNm aplicado entre C e D.

# Engastamento

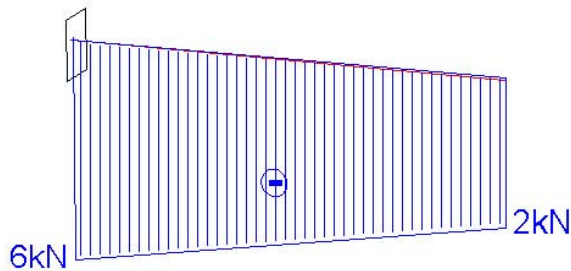


Análise dos esforços solicitantes na barra de D até o apoio (engastamento):

## Cortante



## Momentor Fletor

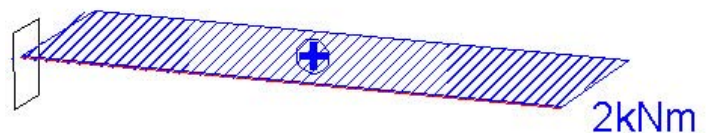


O momento de torção de 2kNm e o momento fletor de 2kNm (em D) estarão presentes em toda a barra e serão transferidos para o apoio.

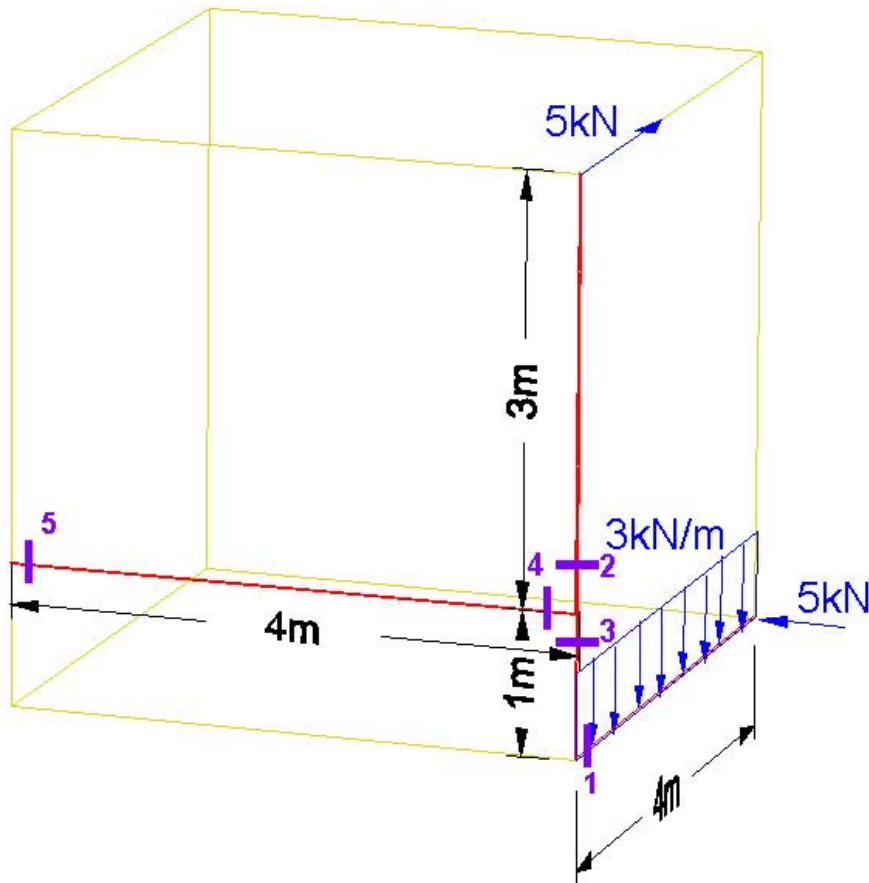
A força de 1kN aplicada em D quando transferida para o apoio deve ser acompanhada do momento de  $1\text{kN} \cdot 4\text{m} = 4\text{kNm}$  que tem a mesma direção e sentido do outro momento de 2kNm resultando em 6kNm no apoio.

A força cortante de 1kN atua em toda a barra e é constante. O momento fletor varia linearmente de 2kNm a 6kNm. Conforme era de se esperar, de acordo com as equações diferenciais:  $dM/dx = V$  e  $dV/dx = -p$ .

## Momento Torçor



## Questão 10

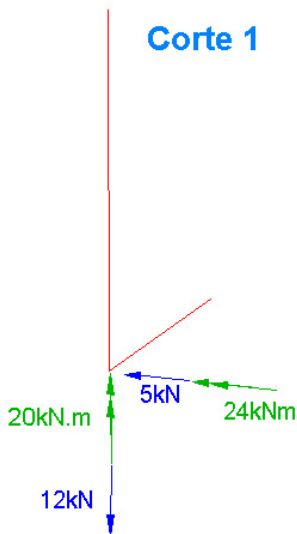


### Corte 1

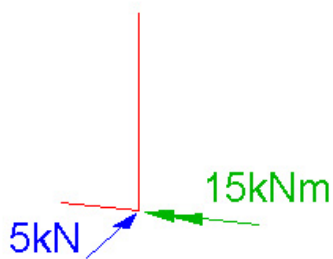
Análise da seção S1:

Partindo sempre da extremidade livre para o apoio, na barra anterior à seção 1 tem-se dois tipos de forças que devem ser tratados separadamente. A primeira força, concentrada com valor de 5kN, será transferida para a seção S1 acompanhada do momento de  $F \cdot D = 5\text{kN} \cdot 4\text{m} = 20\text{kNm}$ .

A segunda força, sendo uniformemente distribuída, acrescentará um momento de intensidade  $p \cdot l^2 / 2 = 3 \cdot 4^2 / 2 = 24\text{kNm}$  à seção S1, além da sua resultante de 12 kN.



### Corte 2



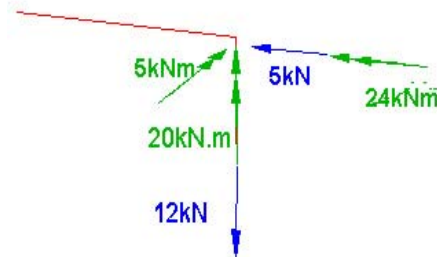
Análise da seção S2:

Os esforços serão obtidos pela transferência da força de 5kN da extremidade livre para a seção S2. A força de 5kN quando deslocada gera um momento de  $F \cdot D = 5\text{kN} \cdot 3\text{m} = 15\text{kNm}$  para ser mecanicamente equivalente.

Análise da seção S3:

Ao transferir as forças e os momentos de S1 para S3 tem-se: a força cortante em S1 de 12kN passa a ser normal em S3; a cortante de 5kN continua cortante em S3 e gera um momento fletor em S3 de  $5\text{kN} \cdot 1\text{m} = 5\text{kNm}$ ; o momento fletor de 24kNm em S1 continua fletor em S3; o momento fletor de 20kNm em S1 passa a ser momento de torção em S3.

### Corte 3



Análise da seção S4:

Transferindo todos os esforços da seção S2 e da seção S3 para a seção S4 e obtendo os esforços resultantes tem-se as forças cortantes de 5kN e de 12 kN, os momentos fletores de 5kNm e de 20kNm e o momento de torção de 39kNm.

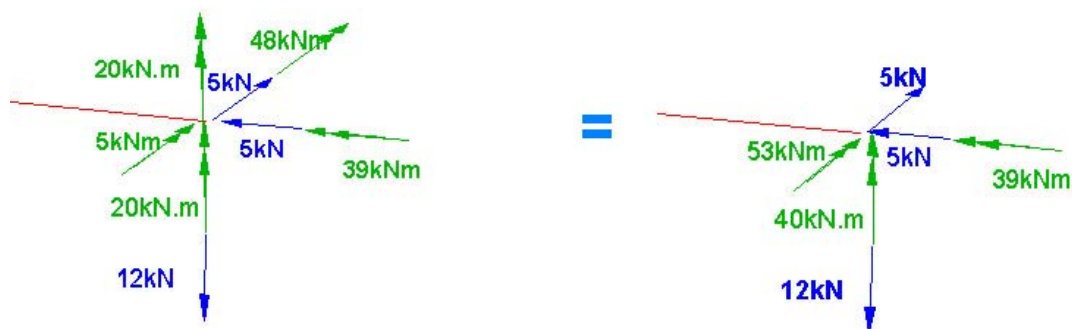
### Corte 4

(Soma do Corte 2 com Corte 3)



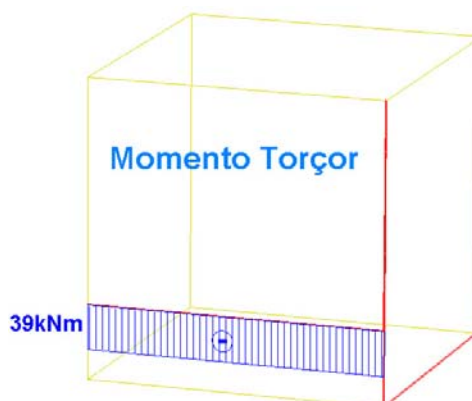
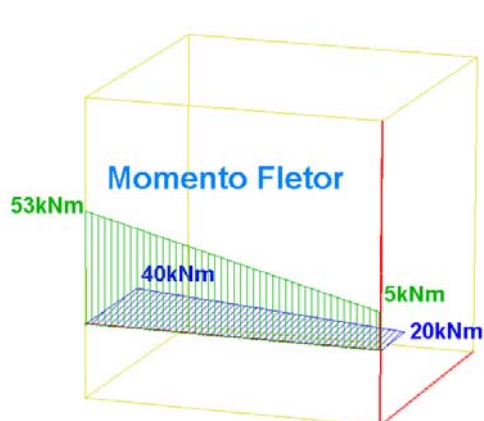
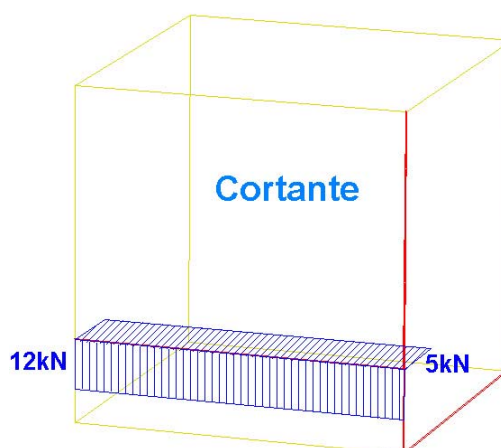
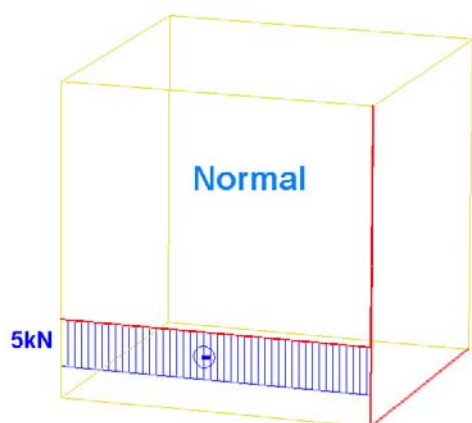
Análise da seção S5:

### Corte 5



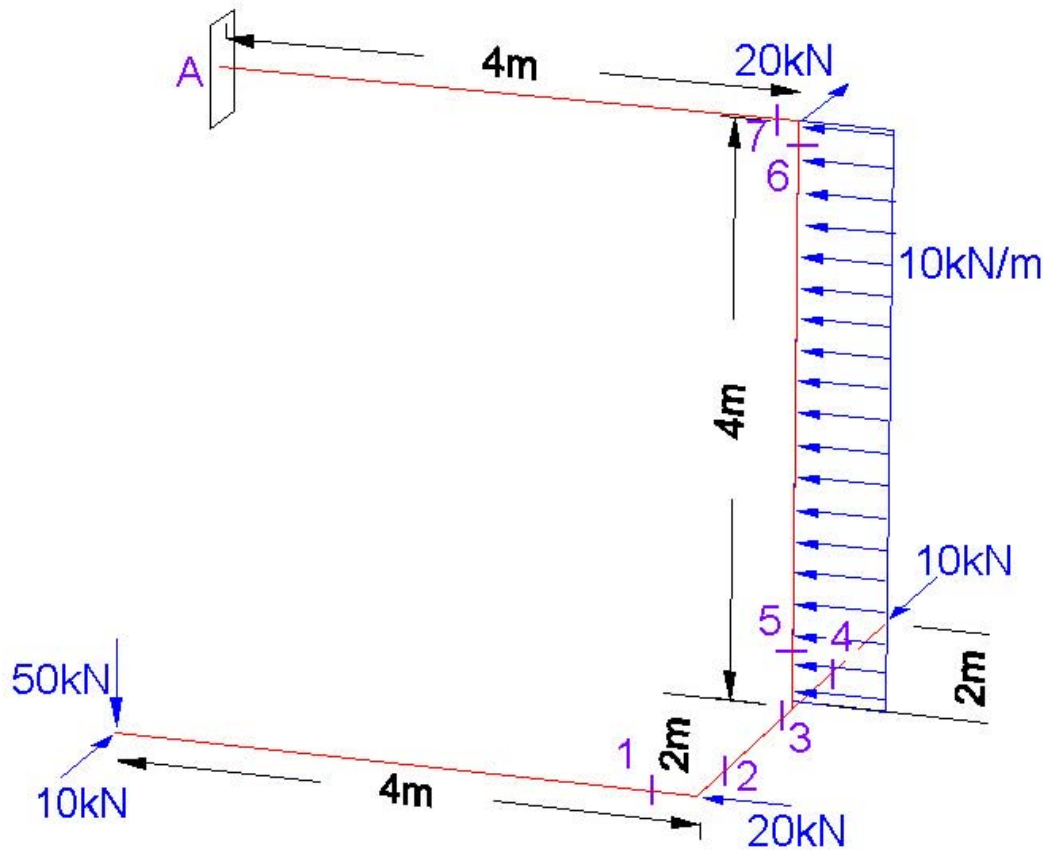
Transferindo todos os esforços de S4 para S5, as forças cortantes de 5kN e de 12kN geram ainda momentos adicionais de 20kNm e 48kNm, respectivamente.

Os diagramas dos esforços solicitantes podem ser esboçados:

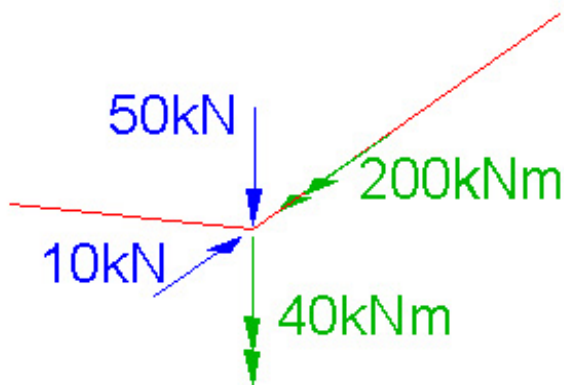




## Questão 11

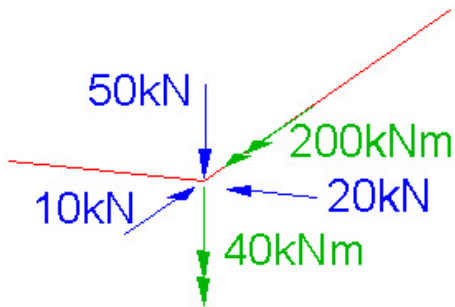


### Corte 1



Análise da seção S1:  
Transferindo-se as forças cortantes de 50kN e de 10kN aplicadas na extremidade livre para a seção S1, geram-se os acréscimos de momentos dados por  $50\text{kN} \cdot 4\text{m} = 200\text{kNm}$  e  $10\text{kN} \cdot 4\text{m} = 40\text{kNm}$ .

## Corte 2



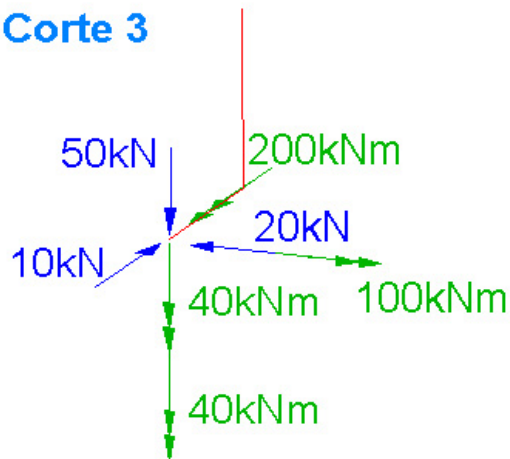
Análise da seção S2:

Transferindo os esforços de S1 para S2 verifica-se que 50kN continua como força cortante, a força de 10kN transforma-se de cortante para normal, 40kNm continua momento fletor, 200kNm transforma-se de momento fletor em momento de torção. Na seção S2 deve-se considerar também a força cortante de 20kN.

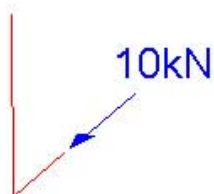
Análise da seção S3:

Transferindo os esforços de S2 para S3 verifica-se que a força cortante de 50kN gera um momento de  $50\text{kN} \cdot 2\text{m} = 100\text{kNm}$ . A força cortante de 20kN gera um acréscimo de momento de  $20\text{kN} \cdot 2\text{m} = 40\text{kNm}$ . Os momentos de 200 kNm e de 40kNm transferem-se integralmente assim como a força normal de 10kN.

## Corte 3



## Corte 4

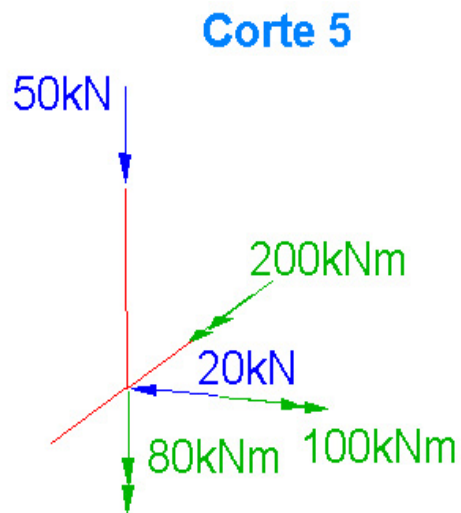


Análise da seção 4:

A força normal de intensidade 10kN é transferida da extremidade livre para a seção S4.

Análise da seção S5:

Transferindo os esforços das seções S3 e S4 para a seção S5 e reduzindo os termos semelhantes têm-se uma força normal de 50kN, uma força cortante de 20kN, os momentos fletores de 200kNm e 100kNm e o momento de torção de 80kNm.



**Corte 6**



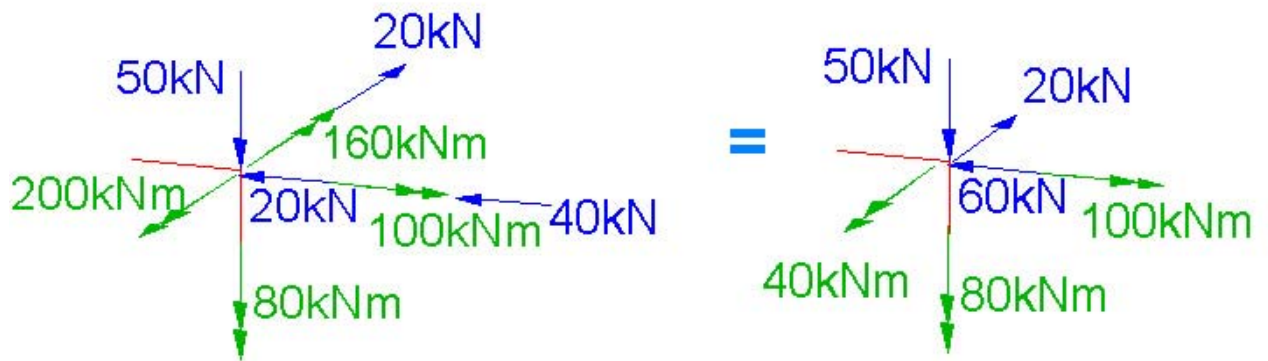
Análise da seção S6:

Transferindo os esforços da seção S5 para a seção S6 tem-se a força normal de 50kN, os momentos fletores de 200kNm e de 100kNm, e o momento de torção de 80kNm. Além disso a força cortante de 20kN gera também um momento adicional de  $20\text{kN} \cdot 4\text{m} = 80\text{kNm}$ . Haverá também a resultante da força distribuída (de 40kN) que ao ser transferida para a seção S5 gerará o momento de  $40\text{kN} \cdot 2\text{m} = 80\text{kNm}$ .

Análise da seção S7:

Ao transferir os esforços de S6 para S7, tem-se a força normal de 60kN, as forças cortantes de 50kN e de 20kN, os momentos fletores de 40kNm e de 80kNm e o momento de torção de 100kNm.

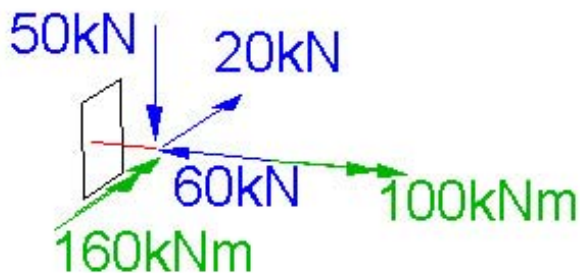
## Corte 7



Análise da seção A:

Ao transferir a força cortante de 50kN da seção S7 para A gera-se um momento adicional de  $50\text{kN} \cdot 4\text{m} = 200\text{kNm}$ . A força cortante de 20kN gera um momento adicional de  $20\text{kN} \cdot 4\text{m} = 80\text{kNm}$ . Ao se transferir os demais esforços de S7 para A, e adicionando-os algebricamente obtêm-se os esforços finais: forças cortantes de 50kN e de 20kN, força normal de 60kN, momento fletor de 160kNm e momento de torção de 100kNm.

## Corte em A



Finalmente, os diagramas dos esforços solicitantes podem ser esboçados como nos exercícios anteriores.