

4 Projeções

Imagine uma figura em três dimensões, por exemplo, um cubo de lado de comprimento unitário, e com vértices nos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$. Para desenhar o cubo, é necessário projetá-lo em um plano. O comando `plot3` do Matlab faz isso, e permite rodar a figura para vê-la de diferentes ângulos.

Exercício 5. Gere vetores x , y e z com as coordenadas de um cubo, de maneira que o comando `plot3(x,y,z)` desenhe todas as arestas do cubo. Experimente rodar o cubo usando as ferramentas do Matlab.

Exercício 6. Para ver como as figuras são geradas, é necessário pensar no conceito de *projeção*. Por exemplo, a projeção do ponto (x_0, y_0, z_0) no plano y,z é obtida pela transformação linear

$$\mathbf{P}_{y,z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, a projeção é

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}_{y,z} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Matematicamente, uma projeção é uma transformação linear \mathbf{P} tal que $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}$ (repare que isso faz sentido intuitivamente, pela ideia do que deveria ser uma projeção).

Use a matriz $\mathbf{P}_{y,z}$ para projetar o seu cubo no plano y,z , e plote o resultado usando `plot`, como na aula passada.

Exercício 7. Determine o espaço-imagem e o espaço nulo de $\mathbf{P}_{y,z}$.

Exercício 8. Adapte as ideias da última aula para calcular a projeção do cubo sobre o plano ortogonal a uma reta formando ângulos $\phi = 45^\circ$ e $\theta = 45^\circ$, como definido na Figura 1.

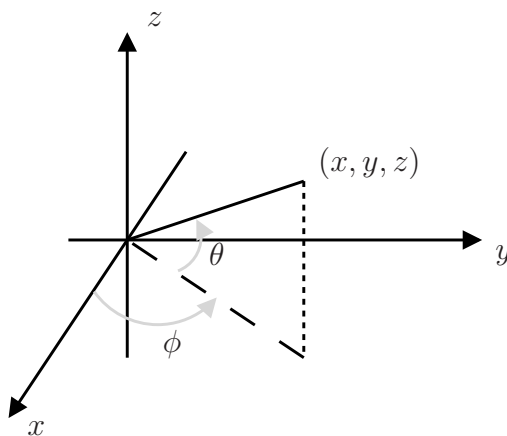


Figura 1: Definindo a direção de uma reta em coordenadas esféricas.

Exercício 9. Agora, experimente achar a projeção do cubo sobre o plano definido por $x + 2y + 3z = 0$.

Exercício 10. Quais são o espaço-imagem e o espaço nulo da transformação do exercício anterior?

Exercício 11. Conhecida a projeção de um ponto sobre um plano qualquer (e conhecido o plano também), é possível recuperar as três coordenadas (x, y, z) do ponto? Por quê?

Exercício 12. E se forem conhecidas duas projeções sobre planos diferentes? Escreva uma função para recuperar as coordenadas do cubo, dadas as projeções dos dois exercícios anteriores.

Veja que determinar uma figura tridimensional a partir de diferentes projeções é a base de sistemas de imageamento como tomografia ou ressonância magnética.