Experiência 04
Transformações Lineares

9 de março de 2015

1 Subespaços

Um subespaço S de um espaço vetorial V é um subconjunto de V que *também é um espaço vetorial*. Para verificar se um subconjunto S de V realmente é um subespaço basta verificar se:

1. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in S$ implica $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S$,
2. $\boldsymbol{x} \in S$, $\alpha \in \mathbb{R}$ implica $(\alpha \boldsymbol{x}) \in S$.

O conceito de subespaço é muito utilizado em processamento de sinais, para problemas de identificação de sinais em ruído. Também é usado em controle, na separação de modos lentos e rápidos de um sistema linear. Veremos alguns exemplos de aplicações mais à frente. Vejamos agora alguns exemplos simples de subespaços de espaços vetoriais.

Exemplo 1. Considere o espaço vetorial $V_1 = \mathbb{R}^3$. O conjunto dos vetores

$$S_1 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_1) \right\}$$

é um subespaço de V_1 correspondente ao plano que contém o eixo dos $(0, x_2, 0)$ e tem inclinação de 45º com relação ao plano $(x_1, x_2, 0)$.

2 Imagem, núcleo, e posto

O subspaço *imagem* (ou *range*) de uma transformação linear $f:\ U \to V$ é o conjunto

$$\mathcal{R}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V :\ \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u} \in U\} \subseteq V.$$

$\mathcal{R}(f)$ é realmente um subespaço de V, pois se $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{R}(f)$, então existem $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ em U tais que $\boldsymbol{v}_1 = f(\boldsymbol{u}_1)$ e $\boldsymbol{v}_2 = f(\boldsymbol{u}_2)$ (por definição). Pela linearidade da f, temos então, para quaisquer α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{v} \triangleq \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 = \alpha_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{u}_2) = f(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2).$$

Como $\boldsymbol{u} \triangleq \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 \in U$, concluímos que $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}(f)$, e portanto $\mathcal{R}(f)$ é um subespaço.

Podemos estender esta definição para matrizes, lembrando a relação entre matrizes e transformações lineares. Assuma que U tenha dimensão n e V tenha dimensão m, e considere bases $\mathcal{B}_n$ para U e $\mathcal{B}_m$ para V. Assuma que, com as bases escolhidas, a matriz que representa f é $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Note que, como $\mathcal{B}_m \triangleq \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ é uma base de V, há uma relação biunívoca entre os vetores $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{bmatrix}^T$ e os vetores $\boldsymbol{v} \in V$, de modo que para todo $\boldsymbol{v} \in V$ existe um único $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\boldsymbol{v} = y_1 \boldsymbol{v}_1 + y_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_m \boldsymbol{v}_m,$$

e vice-versa: para todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ existe um único $\boldsymbol{v} \in V$ correspondente.

Usando essa relação, o espaço-imagem de f, na base $\mathcal{B}_m$, é dado portanto por

$$\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dizemos então que o subespaço imagem da $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Definindo $\boldsymbol{a}_i = i$-ésima coluna de $\boldsymbol{A}$, podemos escrever

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots x_n \boldsymbol{a}_n,$$

ou seja, $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ é o subspaço formado pelas combinações lineares das colunas de $\boldsymbol{A}$.

Exemplo 2. Considere o espaço vetorial V_2 formado pelos polinômios reais de grau menor ou igual a 5, e a transformação linear definida por

$$\begin{aligned} D: \ & V_2 \to V_2 \\ & p \mapsto D(p) = \frac{\mathrm{d}\, p(x)}{\mathrm{d}\, x}, \end{aligned}$$

isto é, a derivada. O subespaço imagem de D é portanto o conjunto dos polinômios com grau menor ou igual a 4.

Usando a base $\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, x^4,\, x^5\}$ para V_2, a matriz que descreve a transformação D é

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O espaço-imagem de $\boldsymbol{D}$ é o conjunto $\mathcal{R}(\boldsymbol{D}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 : \ [\boldsymbol{x}]_6 = 0\}$.

O *posto* (ou *rank*) da transformação linear f é a dimensão do espaço-imagem de f, ou seja

$$\text{posto}(f) = \dim(\mathcal{R}(f)).$$

Por exemplo, o posto da transformação D acima é 5, pois o espaço dos polinômios com grau menor ou igual a 4 tem dimensão 5.

Analogamente, o *posto* de $\boldsymbol{A}$ é a dimensão de $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$. O posto de $\boldsymbol{A}$ corresponde portanto ao número de colunas l.i. de $\boldsymbol{A}$ (veremos que o posto de $\boldsymbol{A}$ é também igual ao número de *linhas* l.i. de $\boldsymbol{A}$, isto é, o posto de $\boldsymbol{A}$ é igual ao posto de $\boldsymbol{A}^T$). Assim, o posto da matriz $\boldsymbol{D}$ do exemplo acima é igual a 5.

A importância dos conceitos de espaço-imagem e posto de matrizes vem principalmente da seguinte questão, que aparece quando se quer resolver um sistema de equações lineares: Dados $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, quando existe uma solução para $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?

Claramente, a solução existe apenas se $\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$. Quando existe uma solução para *qualquer* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$? Quando $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) = \mathbb{R}^m$, ou seja, quando $\text{posto}(\boldsymbol{A}) = m$. Como veremos mais à frente, essas perguntas reaparecem frequentemente em aplicações. Veremos a seguir algumas técnicas para avaliar o posto e o espaço-imagem de uma matriz qualquer. O primeiro resultado é simples, como veremos no teorema abaixo.

Teorema 1. *O posto de uma transformação linear f de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$ (ou o posto de uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é menor ou igual ao mínimo de m, n.*

O espaço-imagem ajuda a responder à pergunta "quando existe uma solução para um sistema de equações lineares?" O *núcleo* (ou *kernel*) vai ajudar a responder à pergunta "quando a solução de um sistema de equações lineares é única?" Vejamos, imagine que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ seja uma solução de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, com $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Imagine que exista uma outra solução, $\boldsymbol{x}_1$, para o mesmo sistema, isto é, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$. Então, subtraindo as duas equações, temos

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}.$$

Note que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$ não significa necessariamente que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$! Por exemplo, considere a matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T$, então $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$, mas $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$.

Vemos que a unicidade da solução de um sistema de equações lineares está relacionada ao conjunto

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{A}) \triangleq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

denominado *núcleo* de $\boldsymbol{A}$.

A mesma ideia vale para uma transformação linear qualquer. Seja então f uma transformação linear de U para V. O *núcleo* de f é o conjunto

$$\mathcal{N}(f) = \{\boldsymbol{u} \in U : f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\} \subseteq U.$$

Ou seja, $\mathcal{N}(f)$ é o subconjunto de U que contém todos os vetores que f leva para o vetor nulo em V.

O núcleo é um subespaço de U, pois, se $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{N}(f)$, então para quaisquer α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2) = \alpha_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{u}_2) = \mathbf{0},$$

e portanto $\boldsymbol{u} \triangleq \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{N}(f)$. A dimensão do núcleo de f é às vezes denominada *nulidade* de f (igualmente para a dimensão do núcleo de uma matriz $\boldsymbol{A}$). Indicaremos então $\mathrm{nul}(\boldsymbol{A}) = \dim(\mathcal{N}(\boldsymbol{A}))$.

Com a definição de núcleo podemos responder à pergunta sobre a unicidade das soluções de um sistema de equações lineares:

Teorema 2. *Considere o sistema de equações lineares $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, em que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, e $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Admitindo-se que exista uma solução, a solução será única se e somente se $\mathcal{N}(\boldsymbol{A}) = \{\mathbf{0}\}$, ou seja, a solução (se existir) é única se e somente se a dimensão do núcleo de $\boldsymbol{A}$ (a nulidade de $\boldsymbol{A}$) for zero.*

Exemplo 3. O núcleo da transformação D do exemplo 2 tem dimensão 1, pois apenas os polinômios da forma $p(x) = c$, em que c é uma constante, têm derivada nula. Assim, $\mathcal{N}(D) = \{p \in V_2 : p(x) = c\}$. Analogamente, o núcleo da matriz $\boldsymbol{D}$ é $\mathcal{N}(\boldsymbol{D}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 : [\boldsymbol{x}]_2 = [\boldsymbol{x}]_3 = \cdots = [\boldsymbol{x}]_6 = 0\}$, ou seja, o núcleo de $\boldsymbol{D}$ são os vetores da forma $\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

3 Exercícios de recordação

Exercício 1. Mostre que todo subespaço S (não vazio) de um espaço vetorial V necessariamente contém o vetor nulo $\mathbf{0}$.

Exercício 2. Mostre que o plano em $\mathbb{R}^3$ definido pela equação

$$x_1 - x_3 = 1$$

não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3. Encontre o subespaço imagem da matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4. Encontre o núcleo da matriz $\boldsymbol{A}$ do exercício anterior. A matriz $\boldsymbol{A}$ tem inversa? Explique.