Aula 02 - Sistemas Lineares

1 Introdução

A resolução de sistemas lineares é uma constante na vida do Engenheiro. Em praticamente todas as áreas da Ciência, resolver sistemas lineares de equações faz parte do dia a dia e é a base de muitos pacotes computacionais. Por exemplo, programas que simulam e resolvem circuitos elétricos, calculam e projetam tensões em elementos estruturais, estimam o tempo de *download* de um arquivo em uma rede de computadores, etc. resolvem sistemas com centenas de variáveis a todo momento. Sistemas de equações lineares são o coração da álgebra linear [Lay, 2011].

Um sistema linear com n equações nas variáveis x_1, x_2, ..., x_n tem a forma

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = & b_n \end{array} \right. . \tag{1}$$

Definindo a matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$ e $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, (1) pode ser reescrita como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2}$$

2 Revisão teórica - Resolvendo um sistema linear

Você deve ter estudado nos cursos de Álgebra Linear a solução de sistemas lineares. Faremos aqui uma breve revisão dos pontos mais relevantes.

Pensando inicialmente no caso de duas variáveis ($n = 2$), cada uma das equações em (1) representa uma reta no plano cartesiano. Como o ponto solução do sistema deve satisfazer as duas equações, concluímos que existem três possibilidades:

1. as retas são paralelas e, portanto, não se interceptam em nenhum ponto. Dessa forma o sistema (1) **não tem solução** ou é **impossível**;

2. as retas são coincidentes e, portanto, interceptam em infinitos pontos. Dessa forma o sistema (1) possui **infinitas soluções diferentes** ou é **possível e indeterminado**;

3. as retas não são nem paralelas e nem coincidentes e, portanto, interceptam-se em um único ponto. Dessa forma, o sistema (1) possui **uma única solução** ou é **possível e determinado**.

Pode-se mostrar que essas 3 possibilidades são as únicas para qualquer número de variáveis.

Se a matriz de coeficientes A é inversível com inversa A^{-1}, pré-multiplicando ambos os lados de (2) por A^{-1}, obtemos

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$

e (1) é possível e determinado. Já se A é singular, dependendo de $\mathbf{b}$ o sistema será impossível ou possível e indeterminado.

O uso direto de (3) não é usualmente recomendado. Inverter uma matriz é uma operação custosa computacionalmente, como veremos na parte experimental. Uma técnica mais eficiente e muito utilizada é a *eliminação de Gauss*. Nesse método, escalona-se a matriz aumentada $[A\,\mathbf{b}]$ de forma a obter um sistema equivalente de solução imediata.

Reveja detalhes do método de eliminação de Gauss em livros de Álgebra Linear, como [Anton and Rorres, 2012; Lay, 2011] e resolva os seguintes exercícios.

Exercício 1: Considere o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rr} x_1 - 2x_2 + x_3 = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = & 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = & -9 \end{array}\right. . \tag{4}$$

Pede-se:

a) Determine a matriz de coeficientes A desse sistema.

b) Determine A^{-1}.

c) Resolva o sistema usando (3).

d) Encontre uma matriz escalonada equivalente à matriz aumentada $[A\,\mathbf{b}]$.

e) Resolva o sistema usando eliminação de Gauss e compare com o resultado do item c).

Exercício 2: Considere o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - 0.4x_2 - 0.6x_3 = & 0 \\ -0.6x_1 + 0.9x_2 - 0.2x_3 = & 0 \\ -0.4x_1 - 0.5x_2 + 0.8x_3 = & 0 \end{array}\right. . \tag{5}$$

Pede-se:

a) Encontre uma matriz escalonada equivalente à matriz aumentada $[A\,\mathbf{b}]$.

b) Encontre a forma geral da solução desse sistema em função da variável livre x_3.

---

3 Comandos Matlab

Os principais comandos que usaremos nessa aula são:

- `det(A)` - fornece o determinante da matriz quadrada `A`

- `inv(A)` - fornece o inverso da matriz quadrada `A`. Retorna um alerta caso `A` seja não inversível ou singular, ou seja, $\det(A) \approx 0$.

- `rank(A)` - fornece uma estimativa do posto de `A`, ou seja, do número de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz `A`. Lembre-se que uma matriz é inversível ou não singular se e somente se seu posto for igual à sua ordem.

- `cond(A)` - fornece o número de condição da matriz `A`, un número indicativo de quão próximo de ser singular é uma matriz[1]. Números de condição altos indicam que a matriz é quase singular. Mais detalhes sobre como esse número é calculado deverão ser vistos em aulas posteriores.

- `R = rref(A)` - gera uma forma escalonada (**r***educed* **r***ow* **e***chelon* **f***orm*) da matriz `A`

- `A\b` ou `mldivide(A,b)` - calcula a solução de $A\mathbf{x} = b$, usando diferentes algoritmos dependendo das propriedades da matriz `A`. Para matrizes quadradas sem nenhuma estrutura especial, é usada eliminação de Gauss.

A forma mais direta de resolver o sistema (2) no Matlab é usar o comando `x=A\b`. Nos exercícios a seguir, ilustramos como essa solução é cerca de 3 vezes mais rápida do que usar `x=inv(A)*b`

Exercício 3: Considere novamente o sistema (4) do Exercício 1. Seja A a matriz de coeficientes desse sistema. **Utilize o Matlab para resolver os itens a seguir** e compare com os resultados que você obteve analiticamente.

a) Encontre o posto de A.

b) Calcule o número de condição de A.

c) Determine A^{-1}.

d) Encontre uma matriz escalonada equivalente à matriz aumentada $[A\,\mathbf{b}]$.

e) Resolva o sistema usando (3).

f) Resolva o sistema usando `A\b`.

Exercício 4: Seja agora o sistema (5) do Exercício 2 e novamente A a matriz de coeficientes desse sistema.

a) Encontre o posto de A.

b) Calcule o condicionamento de A. Compare com o resultado obtido para a matriz do Exercício 3.

c) Determine A^{-1}.

d) Encontre uma matriz escalonada equivalente à matriz A.

[1] O número de condição é um número maior ou igual a 1 que mede o quanto incertezas no vetor b podem ser amplificadas ao se calcular $A\mathbf{x} = b$. Por exemplo, se b for conhecido com incerteza 1% e A tiver um número de condição igual a 1 (o valor mínimo), então um bom algoritmo para resolver $A\mathbf{x} = b$ será capaz de achar a resposta com incerteza de 1% também. No entanto, se o número de condição for 100 e a incerteza em b for novamente de 1%, mesmo o melhor algoritmo pode calcular a resposta de $A\mathbf{x} = b$ com um erro de até 100%.

Exercício 5: No *script* a seguir geramos um sistema com 5 000 equações e 5 000 variáveis com coeficientes aleatórios. Daí, resolvemos usando `inv` e `\`. Digite o *script*, execute-o, compare os tempos de processamento das duas soluções e comente.

```
%Criando o sistema
N = 5000;
A = rand(N,N);
b = rand(N,1);
%Solução usando matriz inversa
 tic;%inicia o cronômetro
 Ainv = inv(A);
x1 = Ainv*b;
tempo1 = toc %para o cronômetro e guarda tempo em tempo1 (em segundos)

%Solução usando mldivide(A,b)

tic; %Inicia cronômetro
x2 = mldivide(A,b);
tempo2 = toc %para o cronômetro e guarda tempo em tempo2 (em segundos)
```

Exercício 6: Seja o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = & 3 \\ (1+10^{-14})\, x_1 + x_2 = & (3+10^{-14}) \end{cases}. \tag{6}$$

a) Resolva o sistema por inspeção (é fácil!)

b) Agora, use o Matlab (`A\b`) ara obter a solução. O que você observa? Por que?

c) Qual o número de condição da matriz de coeficientes desse sistema?

---

4 Aplicação - Preço de equilíbrio

Vamos dividir a economia de um país em vários setores como, por exemplo, manufatura, comunicações, entretenimento e serviços. Suponha que para cada setor saibamos a produção total de um ano e saibamos também exatamente como esse produto é dividido ou "trocado" com os outros setores da economia. O valor total em reais da produção de um setor é chamado de **preço** da produção. Leontief [1951] provou que existem *preços de equilíbrio* que podem ser atribuídos à produção total dos vários setores de modo que a renda de um setor equilibre exatamente seus gastos. Nos exercícios seguintes vamos explorar essa ideia.

Exercício 7: Suponha que uma economia consista dos setores *Carvão*, *Eletricidade* (energia) e *Aço* e a produção de cada setor é distribuída entre os demais setores como mostrado na Tabela 1, em que as colunas representam frações da produção total de um setor. Note que a soma dos valores em cada coluna é igual a 100%. Na Figura 1 ilustra-se a situação.

Tabela 1: Distribuição da produção de cada setor.

	Carvão	Eletricidade	Aço
Carvão	0.0	0.4	0.6
Eletricidade	0.6	0.1	0.2
Aço	0.4	0.5	0.2

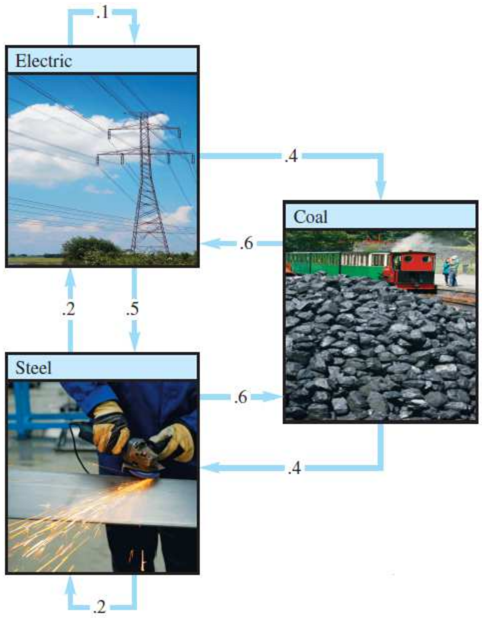

Figura 1: Representação da Tabela 1 [Lay, 2011].

Essa tabela pode ser descrita pela matriz

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Sejam p_C, p_E e p_A os preços de equilíbrio da produção total de carvão, eletricidade e aço, respectivamente. Como, para preços de equilíbrio a renda total de cada setor deve igualar suas despesas, podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_C = & & 0.4p_E + 0.6p_A \\ p_E = & 0.6p_C + 0.1p_E + 0.2p_A \\ p_A = & 0.4p_C + 0.5p_E + 0.2p_A \end{array} \right. . \tag{7}$$

a) Reescreva as equações (7) na forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Note que o sistema formado é homogêneo, ou seja, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e é o mesmo sistema do Exercício 2.

b) Você consegue enxergar uma regra para montar a matriz A do item a) a partir da Tabela 1? Qual é ela?

c) Note que o sistema obtido é indeterminado. Para resolvê-lo é necessário fixar um dos preços (referência) e calcular os outros. Se $p_A = 100$ reais, determine p_C e p_E.

Exercício 8: Considere uma economia um pouco mais complicada em que aparecem cinco setores: Química, Metalurgia, Combustíveis, Energia e Agricultura, nessa ordem. A matriz T para essa economia é

$$T = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.17 & 0.25 & 0.20 & 0.10 \\ 0.25 & 0.20 & 0.10 & 0.30 & 0.00 \\ 0.05 & 0.20 & 0.10 & 0.15 & 0.10 \\ 0.10 & 0.28 & 0.40 & 0.20 & 0.00 \\ 0.40 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.80 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz significa que, por exemplo o setor de Agricultura gasta 10% de sua receita comprando insumos químicos, 10% em combustíveis e 80% é reinvestido na própria agricultura.

a) Usando as regras que você deve ter notado no item b) do Exercício 7, monte a matriz de coeficientes para esse sistema.

b) Se o preço de equilíbrio da agricultura é 1 (milhão de reais), determine os demais preços. Use o Matlab para escalonar a matriz aumentada.

É interessante notar que regras parecidas com as que você usou nessa aplicação serão utilizadas na Análise Nodal de circuitos elétricos simples, como você vai ver nos cursos de Circuitos Elétricos. Lá também é preciso escolher um "preço de referência", o nó terra, e calcular o potencial dos demais em função dele.

5 Aplicação - Interpolação polinomial

Suponha que dados experimentais são representados por um conjunto de pontos no plano. Um **polinômio interpolador** para os dados é um polinômio cujo gráfico passa por todos os pontos[2]. Em um trabalho científico, tal polinômio pode ser usado, por exemplo, para estimar valores entre os pontos de dados conhecidos. Um método para encontrar o polinômio interpolador é resolver um sistema de equações lineares. **Use o Matlab para resolver os seguintes exercícios.** Dica: os comandos `vander` e `polyval` podem ser úteis.

Exercício 9: Vamos encontrar o polinômio interpolador $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ para os dados $(1, 6)$, $(2, 15)$ e $(3, 28)$. Isto é, encontrar a_0, a_1 e a_2 tais que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 &= 6 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 &= 15 \\ a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 &= 28 \end{aligned}$$

a) Use o Matlab para obter a_0, a_1 e a_2.

[2]Note que essa não é necessariamente a melhor forma de interpolar pontos. Uma discussão mais abrangente da interpolação e dos erros associados será vista nos cursos de Cálculo Numérico e em aulas futuras desse curso de Álgebra.

b) Faça um gráfico de $p(t)$, $0 \leq t \leq 5$ e, na mesma figura, coloque um marcador sobre os 3 pontos de dados. A Figura está de acordo com o que você esperava?

Exercício 10: Em uma experiência de túnel de vento a força sobre um projétil devido à resistência do ar foi medida para diversas velocidades em unidades do SI e os resultados estão mostrados na Tabela 2.

Tabela 2: Dados do Exercício 10

Velocidade (v)	0	2	4	6	8	10
Força (F)	0	2.90	14.8	39.6	74.3	119

a) Encontre um polonômio $F(v)$ de grau 5 que interpole esses dados.

b) Faça um gráfico de $F(v)$ e, na mesma figura, coloque um marcador sobre os 5 pontos de dados. A Figura está de acordo com o que você esperava?

c) Usando o seu polinômio, estime a força aplicada sobre o projétil quando ele está viajando a uma velocidade de a uma velocidade de 5 m/s.

d) O que acontece se você tentar interpolar esses pontos por um polinômio de ordem 3?

Exercício 11: Escreva uma função Matlab que receba como entrada que receba dois vetores com N pontos cada. Essa função deverá retornar os coeficientes de um polinômio de grau N que interpole esses pontos.

Referências

Anton, H. and Rorres, C. (2012). *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman.

Lay, D. (2011). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson Education.

Leontief, W. W. (1951). Input-Output Economics. *Scientific American*, 185:15–21.