Aula 02 - Sistemas Lineares - Preparação

1 Introdução

A resolução de sistemas lineares é uma constante na vida do Engenheiro. Em praticamente todas as áreas da Ciência, a resolução de problemas passa por resolver um sistema linear de equações. Por exemplo, programas que simulam e resolvem circuitos elétricos, calculam e projetam tensões em elementos estruturais, estimam o tempo de *download* de um arquivo em uma rede de computadores, etc. resolvem sistemas com centenas de variáveis a todo momento. Sistemas de equações lineares é o coração da álgebra linear [Lay, 2011].

Um sistema linear com n equações nas variáveis x_1, x_2, ..., x_n tem a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = & b_n \end{cases} \tag{1}$$

Definindo a matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$ e $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, (1) pode ser reescrita como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2}$$

2 Revisão teórica - Resolvendo um sistema linear

Você deve ter estudado nos cursos de Álgebra Linear a solução de sistemas lineares. Faremos aqui uma breve revisão dos pontos mais relevantes.

Pensando inicialmente no caso de duas variáveis ($n = 2$), cada uma das equações em (1) representa uma reta no plano cartesiano. Como o ponto solução do sistema deve satisfazer as duas equações, concluímos que existem três possibilidades:

1. as retas são paralelas e, portanto, não se interceptam em nenhum ponto. Dessa forma o sistema (1) **não tem solução** ou é **impossível**;
2. as retas são coincidentes e, portanto, interceptam em infinitos pontos. Dessa forma o sistema (1) possui **infinitas soluções diferentes** ou é **possível e indeterminado**;
3. as retas não são nem paralelas e nem coincidentes e, portanto, interceptam-se em um único ponto. Dessa forma, o sistema (1) possui **uma única solução** ou é **possível e determinado**.

Pode-se mostrar que essas 3 possibilidades são as únicas para qualquer número de variáveis.

Se a matriz de coeficientes A é inversível com inversa A^{-1}, pré-multiplicando ambos os lados de (2) por A^{-1}, obtemos

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$

e (1) é possível e determinado. Já se A é singular, dependendo de $\mathbf{b}$ o sistema será impossível ou possível e indeterminado.

O uso direto de (3) não é usualmente recomendado. Inverter uma matriz é uma operação custosa computacionalmente, como veremos na parte experimental. Uma técnica mais eficiente e muito utilizada é a *eliminação de Gauss*. Nesse método, escalona-se a matriz aumentada $[A\,\mathbf{b}]$ de forma a obter um sistema equivalente de solução imediata.

Reveja detalhes do método de eliminação de Gauss em livros de Álgebra Linear, como [Anton and Rorres, 2012; Lay, 2011] e resolva os seguintes exercícios.

Exercício 1: Considere o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rr} x_1 - 2x_2 + x_3 = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = & 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = & -9 \end{array}\right. .$$

Pede-se:

a) Determine a matriz de coeficientes A desse sistema.

b) Determine A^{-1}.

c) Resolva o sistema usando (3).

d) Encontre uma matriz escalonada equivalente à matriz A.

e) Resolva o sistema usando eliminação de Gauss e compare com o resultado do item c).

Exercício 2: Considere o seguinte sistema linear:

$$\left\{\begin{array}{rr} x_1 - 0.4x_2 - 0.6x_3 = & 0 \\ -0.6x_1 + 0.9x_2 - 0.2x_3 = & 0 \\ -0.4x_1 - 0.5x_2 + 0.8x_3 = & 0 \end{array}\right. .$$

Pede-se:

a) Encontre uma matriz escalonada equivalente à matriz A.

b) Encontre a forma geral da solução desse sistema em função da variável livre x_3.

Referências

Anton, H. and Rorres, C. (2012). *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman.

Lay, D. (2011). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson Education.