Eletromagnetismo I

Prof. Raul Abramo - 2º Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

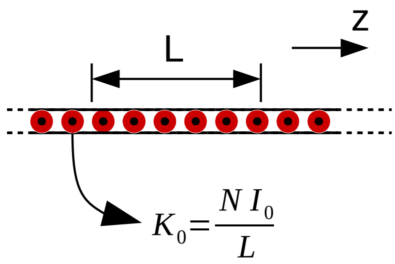
Aula 12

Vimos na aula passada o problema do plano infinito com densidade de corrente $K_0 \to \vec{J} = K_0\delta(x)\,\hat{y}$, e o campo era dado por

$$\vec{B} = \pm\frac{\mu_0 K_0 \hat{y}}{2},$$

onde -1 é válido para $x<0$ e $+1$ para $x>0$.

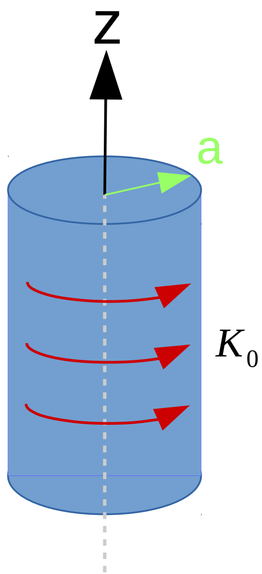
Podemos imaginar essa corrente superficial como muitos fios finos, próximos uns dos outros. Agora, no caso do solenoide, temos



$$K_0 = \frac{N}{L} I_0 = n I_0$$

onde n é o número de voltas do fio no solenoide por unidade de comprimento.

Note que, por simetria, $B_\rho \to 0$ pelo mesmo argumento que nos levam a $B_x \to 0$ no caso do plano: inverter a corrente seria equivalente a girar o nosso referencial em torno de z em 180°.



Como sabemos que $B_\varphi = 0$:

- $B_\varphi \parallel J_\phi \Rightarrow \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \Rightarrow B_\varphi = 0$
- Vamos tomar um circuito circular em torno do eixo z

$$\begin{aligned}\oint_c d\vec{l}\cdot\vec{B} &= \mu_0\int d\vec{S}\cdot\vec{J} = \mu_0 I_{S(c)} = 0!\\ 2\pi R B_\phi &= 0 \quad \to B_\phi = 0\end{aligned}$$

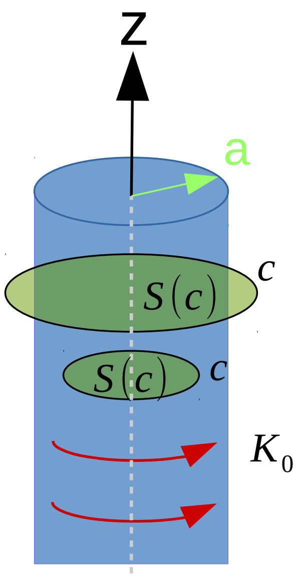
Logo, $\vec{B} = B_z\hat{z}$, e por simetria, B_z independe de z.

$$\begin{aligned}\oint_c d\vec{l}\cdot\vec{B} &= B_z\Delta z = \mu_0 K_0\Delta z = \mu_0 n I_0 \Delta z\\ \therefore\ B_z &= \mu_0\frac{N}{L} I_0\end{aligned}$$

Note que o formato circular da seção do solenoide não tem nenhum papel, a não ser garantir que $B_\phi = 0$.

Então será que qualquer solenoide com qualquer seção transversal, terá um um campo do tipo $\vec{B} = B_0\hat{z}$?

Vamos calcular o campo $d\vec{B}$ na origem, gerada por duas "fatias" de densidade dz em $+z$ e $-z$.



- $d\vec{l}_\pm = dx'\hat{x} + dy'\hat{y}$
- $\vec{R}_\pm = \vec{r} - \vec{r}'_\pm = \vec{0} - x'\hat{x} - y'\hat{y} \mp z\hat{z}$

Então

$$
\begin{aligned}
d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} dI \left\{ \oint_{c+} d\vec{l} \times \frac{\vec{R}_+}{R^3} + \oint_{c-} d\vec{l} \times \frac{\vec{R}_-}{R^3} \right\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} dI \left\{ \oint_c (dx'\hat{x} + dy\hat{y}) \times \frac{(-2x'\hat{x} - 2y'\hat{y})}{R^3} \right\} \\
&= \frac{\mu_0 \overbrace{K_0 dz}^{dI}}{4\pi} (-2) \oint_c d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}'}{R^3}
\end{aligned}
$$

Podemos avançar um pouco mais

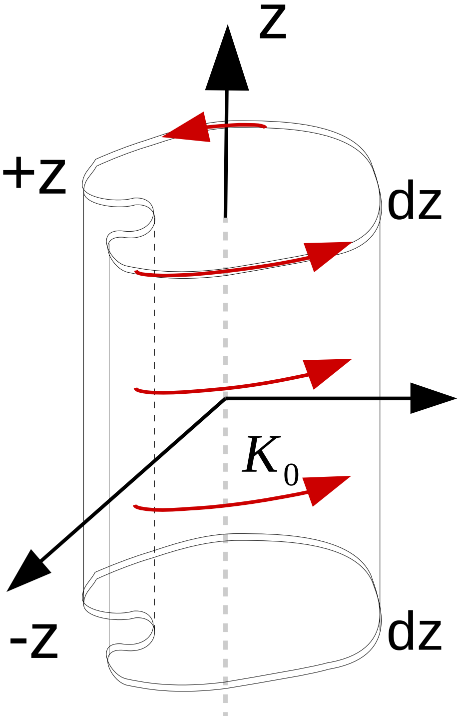
$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \int d\vec{B} \\
&= -\int_0^\infty \frac{\mu_0 K_0 dz}{2\pi} \oint_c d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Mas já conhecemos essa integral:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz (c^2 + z^2)^{-3/2} &= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dz (c^2 + z^2)^{-3/2} \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{1}{c^2}
\end{aligned}
$$

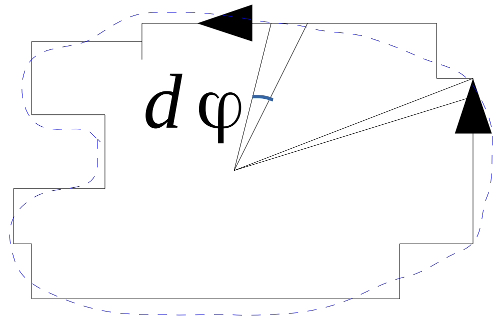
Portanto,

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \oint_c d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}'}{x'^2 + y'^2} \\
&= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi} \hat{z} \oint_c \frac{dx'y' - dy'x'}{x'^2 + y'^2}
\end{aligned}
$$



Note que

$$\begin{aligned}
\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy'x'}{x'^2+y'^2} &= \arctan\frac{y'}{x'} \\
\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'y'}{x'^2+y'^2} &= \arctan\frac{x'}{y'}
\end{aligned}$$



Como $\arctan(-\varphi) = -\arctan(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi}\hat{z}\oint_c d\left(\arctan\frac{x'}{y'}\right) \\
&= \frac{\mu_0 K_0}{2\pi}\hat{z}\oint_c d\varphi
\end{aligned}$$

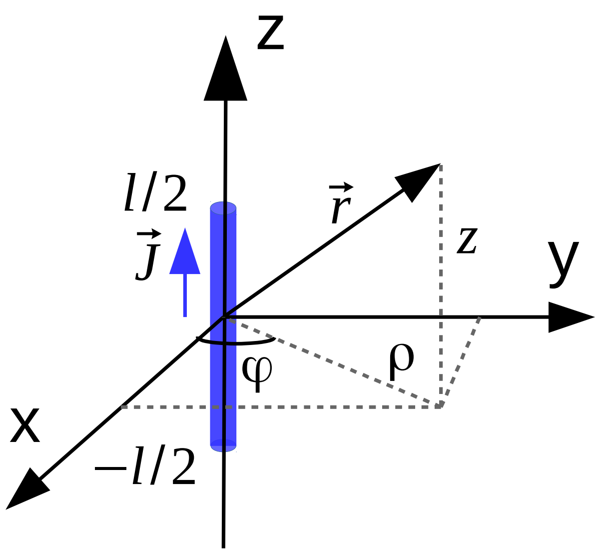
e, portanto,

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 K_0 \hat{z}}$$

Calculo do campo magnético a partir do potencial vetor

Vamos agora calcular o campo magnético gerado por um segmento de fio reto a partir do potencial vetor. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \\
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}
\end{aligned}$$



Nesse caso,

$$\vec{J} = J_0\hat{z}\times\begin{cases} 1, & \text{no fio} \\ 0, & \text{fora do fio}\end{cases}$$

- $\vec{r}' = z'\hat{z}$
- $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$
- $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{I\hat{z}}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} dz' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\ln\left(\left(z-z'\right)+\sqrt{(z-z')^2+r^2}\right)\Big|_{-l/2}^{l/2}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{z+l/2+\sqrt{(z+l/2)^2+\rho^2}}{z-l/2+\sqrt{(z-l/2)^2+\rho^2}}\right]\hat{z}}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A}{\partial\rho}\hat{\varphi} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{z-l/2+\sqrt{(z-l/2)^2+\rho^2}}\frac{\rho}{\sqrt{(z-l/2)^2+\rho^2}} - \frac{1}{z+l/2+\sqrt{(z+l/2)^2+\rho^2}}\frac{\rho}{\sqrt{(z+l/2)^2+\rho^2}}\right]\hat{\varphi} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+\rho^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+\rho^2}}\right]\hat{\varphi}
\end{aligned}
$$

Note que, no limite de $l\to\infty$, temos

$$
\vec{B}\to\frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho}\hat{\varphi}
$$