Eletromagnetismo I

Prof. Luis Abramo - 2º Semestre 2015

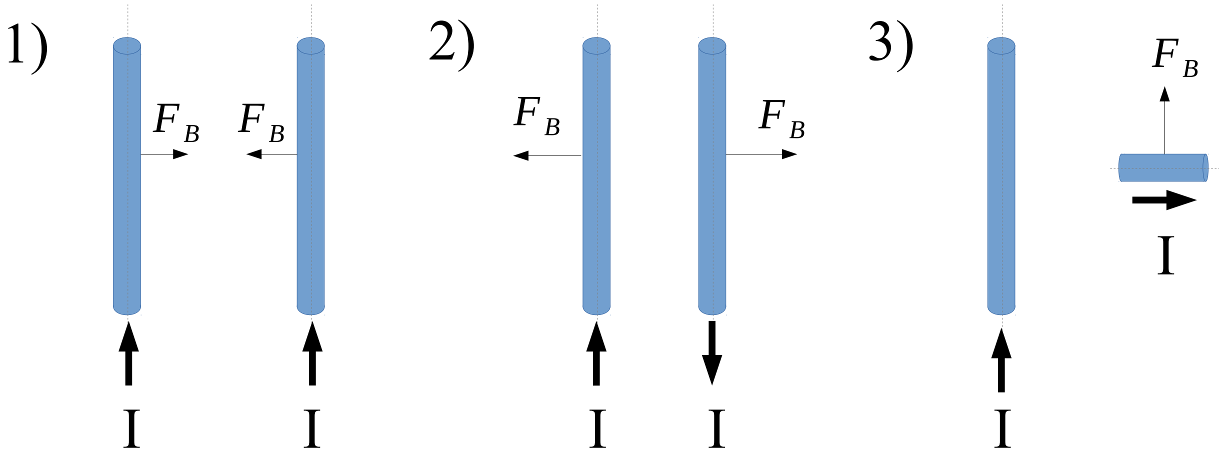
Preparo: Diego Oliveira

<u>Aula 6</u>

Magnetostática

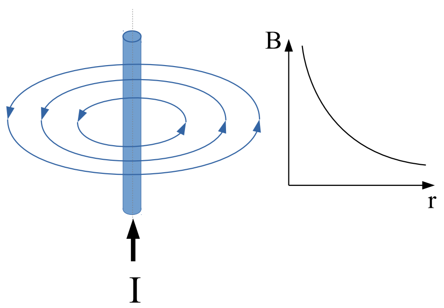
* Força Magnética
* Corrente e densidade de corrente
* Equação da continuidade e correntes estacionárias
* Lei de Ampère e de Biot-Savart

As observações mostram que:



Para um <u>fio reto</u> e <u>muito longo</u>, que carrega uma <u>corrente I constante</u>, a seguinte <u>receita</u> parece funcionar:

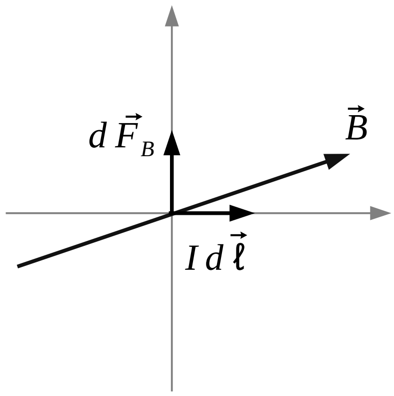
* O campo de forças do fio <u>circula</u> em torno do fio.



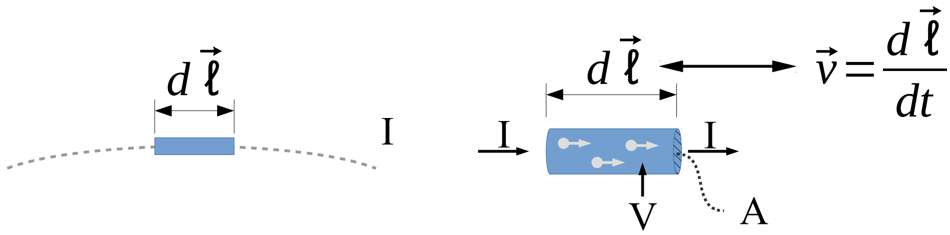
* A força desse campo B num segmento $d\vec{\ell}'$ com corrente I' é:

$$d\vec{F}_B = \left(I' d\vec{\ell}'\right) \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F}_B = \int I' d\vec{\ell}' \times \vec{B}}$$



Mas é claro que correntes correspondem a cargas em movimento,



Mas a corrente que saí por A

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_a d\vec{S} \cdot \underbrace{(\rho \vec{v})}_{\vec{J} \equiv \text{“densidade de corrente”}}$$

Logo:

$$\vec{F}_B = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B} = \int d\vec{S} \cdot (\rho \vec{v}) \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Mas aqui $d\vec{\ell}$ está fazendo apenas o papel do deslocamento espacial das cargas, $\vec{v} = d\vec{\ell}/dt$, portanto podemos escrever:

$$\vec{F}_B = \int d\vec{S} \cdot d\vec{\ell}' \rho \vec{v} \times \vec{B} = \boxed{\int dV \vec{J} \times \vec{B}}$$

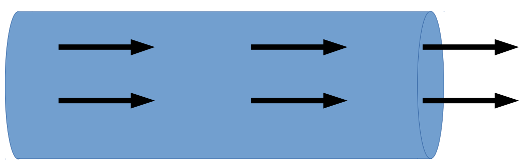
Para uma carga pontual, $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$,

$$\vec{F}_{B,q} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Equação da Continuidade

Vamos considerar as cargas que entram e saem de certo volume fino:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int dV \rho$$



Mas, pelo menos argumento usado acima,

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint d\vec{S}\cdot\vec{J}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \int dV\,\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\oint d\vec{S}\cdot\vec{J} = -\int dV\,\nabla\cdot\vec{J},$$

e pela a primeira e última igualdade encontramos:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0}$$

a chamada equação da continuidade. Note que não há "criação" de cargas, apenas redistribuição!

Força de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \vec{F} = \int dV\left(\rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}\right)$$

Note que a força magnética, $\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$, nunca realiza trabalho:

$$dW_B = \vec{F}_B\cdot d\vec{x} = \vec{F}_B\cdot\vec{v}\cdot dt = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

Magnétostática $\leftrightarrow$ Correntes estacionárias

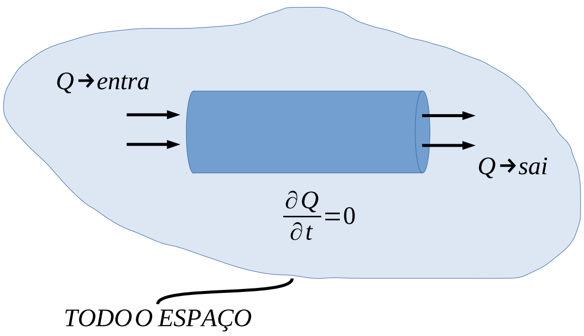
Eletrostática $\leftrightarrow$ Cargas estacionárias

Em particular, note que numa carga pontual em movimento não é uma situação que pode ser descrita pela magnetostática!

O que não é tão óbvio é que, em magnetostática, temos que ter:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

isto é, não há "fontes" de corrente: ela sai de um lugar para entrar em outro.



Um campo vetorial $\vec{J}$ sem "fontes" nem "ralos" tem a propriedade de $\nabla\cdot\vec{J} = 0$.

De fato, se:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Eq. continuidade} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nabla\cdot\vec{J} = 0}$$

As leis de Ampére (1826) e de Biot-Savart (1820)

Leis Fundamentais		Lei derivada (~ 1820)
(Ampère)	$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$	$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int I\left(\vec{r}'\right)d\vec{\ell}'\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}$
	$\nabla\cdot\vec{B}=0$	ou $\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}}$

N.B.: No caso de um fio muito fino:

$$
\begin{aligned}
\int dV'\vec{J} &= \int dS d\ell'\rho\vec{v}\\
&= \int d\vec{\ell} dS'\rho' v\\
&= \int d\vec{\ell}'\,\underbrace{\lambda\left(\vec{r}'\right)v\left(\vec{r}'\right)}_{I}
\end{aligned}
$$

Vamos agora demonstrar que a Lei de Biot-Savart segue das duas equações fundamentais da magnetostática. Como $\nabla\cdot\vec{B}=0$, podemos escrever que:

$$
\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \qquad\Rightarrow\qquad \nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0
$$

$$
\vec{A}:\ \text{“Potencial Vetor”},\qquad
\begin{array}{ccc}
\vec{A} & \leftrightarrow & \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\
\phi & \leftrightarrow & \vec{E}=-\nabla\phi
\end{array}
$$

Note que, classicamente, $\vec{A}$ não é um campo físico; ele só tem significado por meio de sua relação com $\vec{B}$, $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$. Em quântica, $\vec{A}$ é um campo físico no efeito Aharonov-Bohm.

Em particular, podemos adicionar qualquer gradiente ∇f ao $\vec{A}$ sem alterar o campo $\vec{B}$:

$$
\nabla\left(\vec{A}+\nabla f\right)=\nabla\times\vec{A}+\cancelto{0}{\nabla\times\nabla f}=\nabla\times\vec{A}=\vec{B},
$$

ou seja, podemos somar qualquer ∇f a $\vec{A}$, “impunemente”.

Vamos agora explorar as implicações na Lei de Ampère:

$$
\nabla\times\vec{B}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\mu_0\vec{J}
$$

mas

$$
\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}.
$$

Porém, “sempre” podemos fazer $\vec{A}=\vec{A}'+\nabla f$, e escolher f de tal modo que $\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}'+\nabla^2 f=0$.

Note ainda que $\nabla^2 \vec{A} \neq 0$, apensar de $\nabla \cdot \vec{A} = 0$! Ou seja, podemos tomar:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Mas essa é uma equação que já conhecemos

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Agora, podemos verificar a Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}\,(\vec{r}) = \nabla_r \times \vec{A}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \, \nabla_r \times \left(\frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Como:

$$\nabla \times \left(f \vec{F}\right) = f \nabla \times \vec{F} + \left(\nabla f\right) \times \vec{F}, \qquad \text{e} \qquad \nabla_r \times \vec{J}\,(\vec{r}) = 0,$$

$$\vec{B} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \underbrace{\left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}} \times \vec{J}\left(\vec{r}'\right)$$

$$\therefore \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \;\; \vec{J}\left(\vec{r}'\right) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

Também podemos mostrar o reverso: que o $\vec{B}$ dado acima obedece a lei de Ampère e $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

$$i) \;\; \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \nabla \cdot \left(\vec{J} \times \frac{R}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \left[\frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \cancelto{0}{\left(\nabla_r \times \vec{J}(\vec{r}')\right)} - \vec{J}\left(\vec{r}'\right) \cdot \cancelto{0}{\left(\nabla_r \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right)} \right]$$

$$
\begin{aligned}
ii)\nabla\times\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left[\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\underbrace{\left(\nabla_r\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right)}_{4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')}-\left(\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\cdot\nabla_r\right)\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{r})+\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left(\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\cdot\nabla_{r'}\right)\frac{\vec{R}}{R^3}\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{r})+\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(J_x\left(\vec{r}'\right)\frac{x-x'}{R^3}\right)\hat{e}_x+\frac{\partial}{\partial y'}\left(J_y\left(\vec{r}'\right)\frac{y-y'}{R^3}\right)\hat{e}_y+\frac{\partial}{\partial z'}\left(J_z\left(\vec{r}'\right)\frac{z-z'}{R^3}\right)\hat{e}_z\right](\ldots)\\
&\qquad(\ldots)+\frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\frac{\vec{R}}{R^3}\nabla'\cdot\vec{J}
\end{aligned}
$$

A primeira integral pode ser reduzida a integrais de superfícies arbitrárias, e, portanto, devem ser nulas. Já a ultima integral é nula devido a equação da continuidade.