

Mecânica Quântica II - 4302404

1ª lista

- 1) a) Obtenha os estados triplete de spin 1 aplicando o operador S_- ao estado $|1\ 1\rangle = \uparrow\uparrow$
b) Aplique os operadores $S_{\pm}$ ao estado singlete de spin 0:

$$|0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow).$$

Explique o resultado obtido.

- c) Mostre que a ação dos operadores $S_{\pm}$ no estado

$$|1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$$

fornece:

$$S_{\pm}|1\ 0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1\ \pm 1\rangle.$$

- c) Mostre que os estados $|1\ 1\rangle = \uparrow\uparrow$ e $|1\ -1\rangle = \downarrow\downarrow$ são auto-estados de S^2 , com autovalores apropriados.

- 2) Dois elétrons estão no estado $|s, m\rangle = |1, -1\rangle$. Numa medida de S_{1z} , quais serão os possíveis valores obtidos e as probabilidades correspondentes.

- 3) Considere dois elétrons no estado de spin singlete. Se uma medida de S_z de um dos elétrons mostrar que ele está num estado com $m = 1/2$, qual é a probabilidade de uma medida de S_z do outro elétron resultar em $m = 1/2$?

- 4) Considere duas partículas com spin $1/2$ que interagem através da hamiltoniana $H_0 = \frac{A}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, onde A é uma constante. Quais são os auto-estados e auto-valores de H_0 ? Existe degenerescência?

- 5) Os *hádrons* são constituídos de partículas elementares, possuindo spin $1/2$, denominadas *quarks*. Os *bárions* (próton, neutron, etc) são constituídos de 3 quarks, enquanto que os *mésons* (píon, káon, etc) são constituídos de um quark e um anti-quark.

- a) Quais são os possíveis spins dos bárions?

- b) Quais são os possíveis spins dos mésons?

- 6) Uma partícula de spin 1 e uma partícula de spin 2 (por exemplo, um fóton e um gráviton) estão em repouso em uma configuração tal que o spin total é 3, e sua componente z é $\hbar$. Em uma medida da componente z do spin da partícula de spin 2, que valores poderão ser obtidos, e quais serão as respectivas probabilidades?

- 7) Em um átomo de hidrogênio, o elétron está com spin para baixo no estado ψ_{510} . Em uma medida do quadrado do momento angular total do elétron (sem incluir o spin do próton), que valores poderão ser obtidos, e quais serão as respectivas probabilidades?

- 8) Um elétron num átomo de hidrogênio ocupa o estado combinado de posição e spin dado por

$$R_{21} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0 | \uparrow \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1 | \downarrow \rangle \right)$$

- a) Se voce medir o momento angular orbital quadrado, L^2 , quais valores podem ser obtidos, e quais as probabilidades?
- b) O mesmo para a componente L_z .
- c) O mesmo para S^2 .
- d) O mesmo para S_z .
- e) Seja $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, o momento angular total do elétron. Se voce medir J^2 , quais valores podem ser obtidos, e quais as probabilidades?
- f) O mesmo para a componente J_z .

9) Considere um sistema constituido de duas partículas de spin 1.

- a) Quantos auto-vetores existem? Represente a base acoplada deste sistema.
- b) Expanda os estados

$$|\psi\rangle_0 = |1\ 0\rangle|1\ 0\rangle,$$

$$|\psi\rangle_1 = |1\ 1\rangle|1\ 0\rangle$$

e

$$|\psi\rangle_2 = |1\ 1\rangle|1\ -1\rangle$$

em termos dos elementos da base acoplada.

- c) Verifique se os estados do item anterior são autoestados de S^2 .
- d) Se voce medir S^2 no estado $|\psi\rangle_0$, quais valores podem ser obtidos, e quais as probabilidades?

10) Este problema está num dos exames de ingresso na pós: Seja um sistema composto por um par **A** e **B** de spins 1/2 descrito pelo estado

$$|\psi\rangle = \alpha (|z_+^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_-^{\mathbf{B}}\rangle - |z_-^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_+^{\mathbf{B}}\rangle)$$

onde

$$\hat{S}_x|x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2}|x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \langle x_{\pm}^{\mathbf{A}}|x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = 1; \hat{S}_y|y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2}|y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \langle y_{\pm}^{\mathbf{A}}|y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = 1; \hat{S}_z|z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2}|z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \langle z_{\pm}^{\mathbf{A}}|z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = 1,$$

(e anologicamente para **B**) e onde escrevemos os operadores de spin como

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

na base de auto-estados de $\hat{S}_z$:

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Responda:

- a) Qual o valor de $\alpha \in R$ pra que $|\psi\rangle$ seja normalizado?
- b) Qual é a probabilidade de se medir na direção $z : -\hbar/2$ para o spin **A** e $+\hbar/2$ para o spin **B**?
- c) Qual é a probabilidade de se medir na direção $x : +\hbar/2$ para o spin **A** e $-\hbar/2$ para o spin **B**?
- d) Qual é a probabilidade de se medir na direção $z : -\hbar/2$ para o spin **A** e na direção $x : +\hbar/2$ para o spin **B**?