

Circuitos trifásicos

Conceitos gerais

Eletrotécnica Geral

Depto. de Engenharia de Energia e Automação Elétricas
Escola Politécnica da USP

26 de abril de 2017

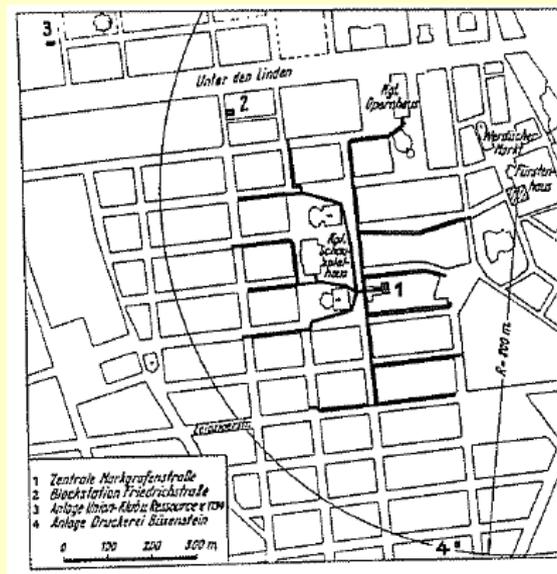
Sistemas em corrente contínua

Surgimento e aplicação

- As primeiras redes elétricas, desenvolvidas por Thomas Edison e implantadas em caráter experimental no ano de 1882, operavam em corrente contínua e baixas tensões;
- Essas redes eram compostas por circuitos de distribuição de pouca extensão e, portanto, as perdas ôhmicas decorrentes da circulação de correntes nesses circuitos eram irrelevantes;
- Inicialmente atendiam cargas de iluminação e, posteriormente, sistemas de tração elétrica.

Sistemas em corrente contínua

Rede de distribuição em Berlim - 1885



Sistemas em corrente alternada

Transmissão de energia elétrica a longas distâncias

- Gaulard e Gibbs desenvolveram o primeiro sistema monofásico em corrente alternada, com a criação do primeiro transformador em 1883, e instalaram seu sistema na Grosvenor Art Gallery em 1885 (posteriormente modificado pelo engenheiro Sebastian Ziani de Ferranti);
- Os engenheiros húngaros Bláthy, Déri e Zipernowski desenvolveram o primeiro transformador monofásico industrial e instalaram diversos sistemas monofásicos na Europa continental;
- Westinghouse encarregou o engenheiro William Stanley de estudar e depurar o sistema desenvolvido por Gaulard e Gibbs.

Sistemas em corrente alternada

O transformador de Gaulard e Gibbs



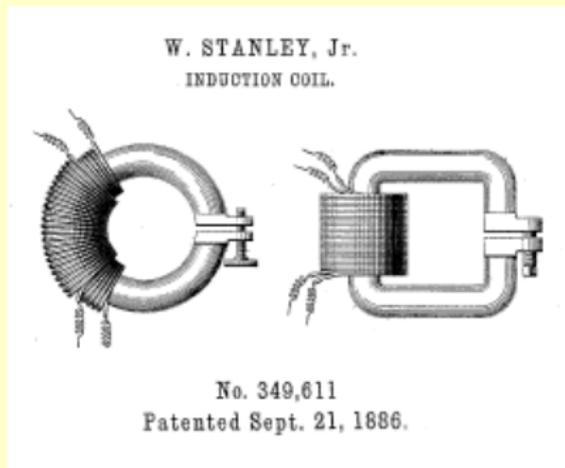
Sistemas em corrente alternada

O transformador de Bláthy, Déri e Zipernowski



Sistemas em corrente alternada

O transformador de William Stanley



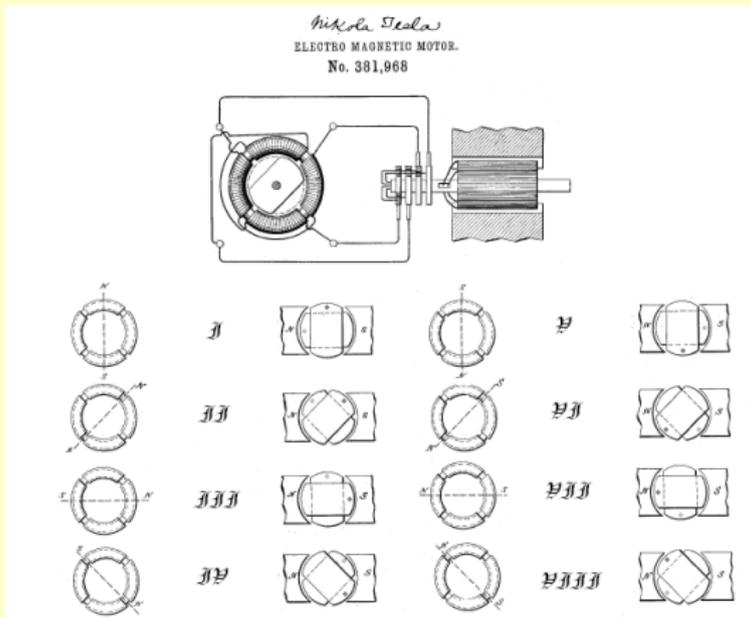
Conflito e resolução

A batalha entre os sistemas

- Ao final da década de 1880 os sistemas em corrente contínua, desenvolvidos por Edison, enfrentavam concorrência acirrada dos recém desenvolvidos sistemas em corrente alternada monofásicos;
- Enquanto a transmissão a longas distâncias apresentava-se como a maior desvantagem dos sistemas em corrente contínua, a ausência de um motor real apresentava-se como o maior inconveniente dos sistemas em corrente alternada;
- A “batalha dos sistemas” encerrou-se na década de 1890, com a invenção dos sistemas polifásicos. Contudo, os sistemas em corrente alternada e corrente contínua coexistiram ainda por vários anos.

O motor em corrente alternada de Tesla

Reprodução da patente



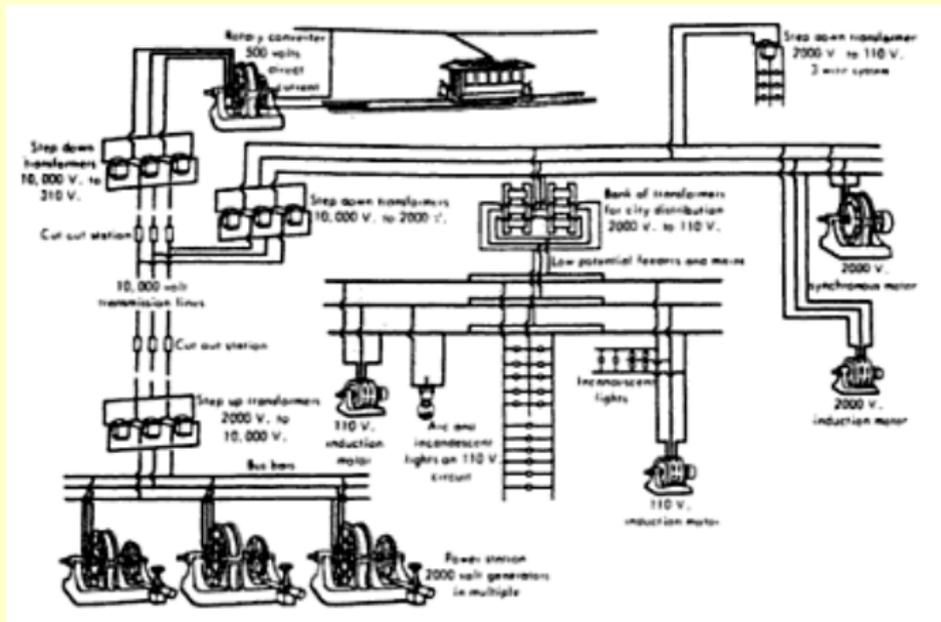
O sistema trifásico

Desenvolvimento do sistema universal

- A concepção dos sistemas trifásicos, e conseqüentemente os motores trifásicos, permitiu que os sistemas em corrente alternada pudessem se comparar, do ponto de vista de funcionalidades, ao sistemas em corrente contínua. Isto é, os sistemas trifásicos eram capazes de suprir a demanda de energia para iluminação e motores;
- Sistemas em corrente contínua continuaram a existir. Principalmente pelo elevado custo que a mudança para o sistema em corrente alternada acarretaria;
- A solução para a coexistência entre os dois sistemas deu-se no nível técnico e no nível institucional. Problemas técnicos foram solucionados com máquinas elétricas rotativas, e problemas no nível institucional foram solucionados com fusões e expansões das empresas.

O sistema universal

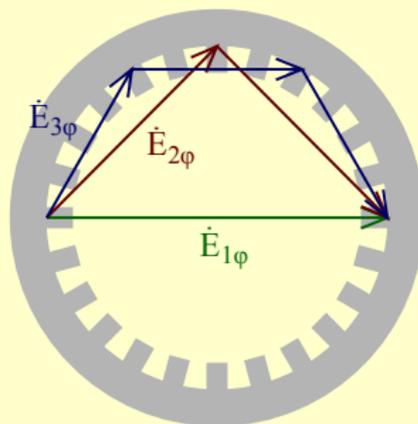
A concepção da Westinghouse



Sistemas polifásicos

A “vantagem” do sistema trifásico

- A figura ilustra a *f.e.m.* induzida nas bobinas do estator de uma máquina com “n” bobinas, que podem ser conectadas da forma que se achar mais conveniente e que suportam corrente \dot{I} :



Sistemas polifásicos

A “vantagem” do sistema trifásico

- Para o caso de todas as bobinas ligadas em série, a máxima potência transmitida é dada por:

$$|\bar{S}_{1\phi}| = |\dot{E}_{1\phi}| \cdot |i|$$

- Para o caso de dois grupos de bobinas ligados em série, com um ponto em comum, a máxima potência transmitida é dada por:

$$|\bar{S}_{2\phi}| = 2 \cdot |\dot{E}_{2\phi}| \cdot |i| = 2 \cdot \frac{|\dot{E}_{1\phi}|}{\sqrt{2}} \cdot |i| \approx 1,41 \cdot |\bar{S}_{1\phi}|$$

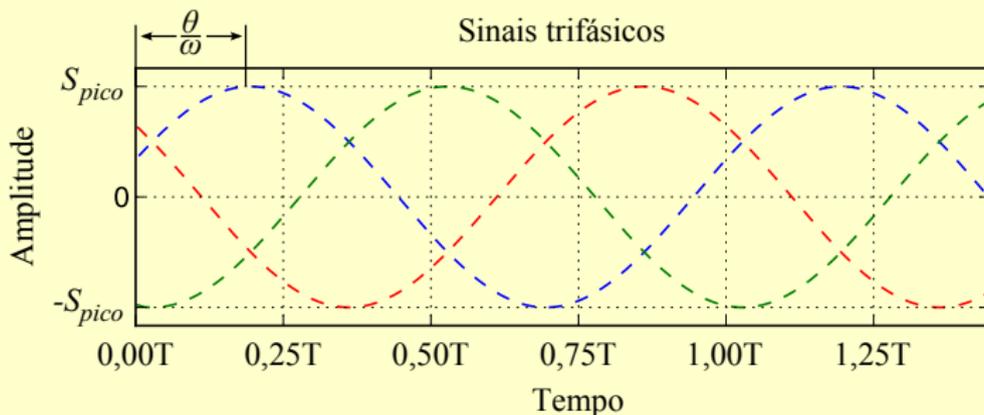
- Para o caso de três grupos de bobinas ligados em série, com um ponto em comum, a máxima potência transmitida é dada por:

$$|\bar{S}_{3\phi}| = 3 \cdot |\dot{E}_{3\phi}| \cdot |i| = 3 \cdot \frac{|\dot{E}_{1\phi}|}{2} \cdot |i| = 1,5 \cdot |\bar{S}_{1\phi}|$$

Sistemas trifásicos

Definições

- A figura ilustra três sinais senoidais, arbitrários, que definem um sistema trifásico.



Sistemas trifásicos

Definições

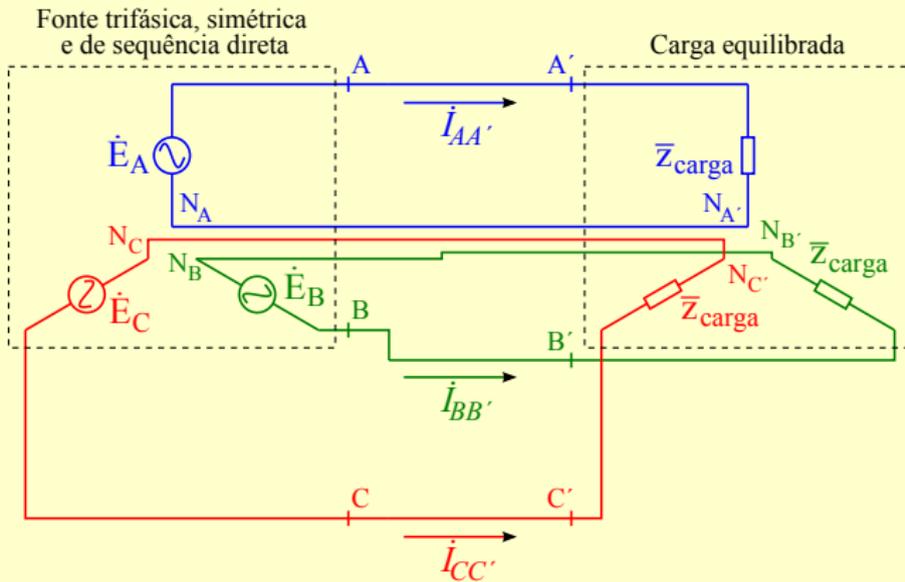
- Esses sinais podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{\text{azul}}(t) = S_{\text{pico}} \cos(\omega t - \theta) \\ s_{\text{verde}}(t) = S_{\text{pico}} \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\ s_{\text{vermelho}}(t) = S_{\text{pico}} \cos(\omega t - \theta + 120^\circ) \end{array} \right.$$

- Supondo que o sinal azul seja o sinal da fase A, que o verde seja o da fase B e que o vermelho seja o da fase C, diz-se que esse sinal trifásico é de sequência positiva (ou qualquer de suas variações cíclicas);
- Caso o sinal azul seja o sinal da fase A, o verde seja o da fase C e o vermelho seja o da fase B, diz-se que esse sinal trifásico é de sequência negativa (ou qualquer de suas variações cíclicas).

Sistemas trifásicos

Ligação em estrela



Ligação em estrela

Equacionamento

- Considerando que $\dot{E}_{A-NA} = \dot{E}_A = |\dot{E}| \angle 0^\circ = E \angle 0^\circ$, as correntes $i_{AA'}$, $i_{BB'}$ e $i_{CC'}$ são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{AA'} = i_A = \frac{\dot{E}_{A-NA}}{\bar{z}_{carga}} = \frac{E \angle 0^\circ}{z \angle \phi} = \frac{E}{z} \angle -\phi \\ i_{BB'} = i_B = \frac{\dot{E}_{B-NB}}{\bar{z}_{carga}} = \frac{E \angle -120^\circ}{z \angle \phi} = \frac{E}{z} \angle -\phi - 120^\circ \\ i_{CC'} = i_C = \frac{\dot{E}_{C-NC}}{\bar{z}_{carga}} = \frac{E \angle 120^\circ}{z \angle \phi} = \frac{E}{z} \angle -\phi + 120^\circ \end{array} \right.$$

- Além disso:

$$i_{NN'} = i_A + i_B + i_C = \frac{\dot{E}}{z} \cdot (1 + \alpha^2 + \alpha) = 0$$

Ligação em estrela

Definições

- Tensão de fase: tensão medida na fonte ou na carga (elemento monofásico). No caso da ligação em estrela é a tensão entre o terminal da fonte, ou carga, e o centro-estrela (\dot{V}_{AN} , \dot{V}_{BN} , \dot{V}_{CN} , $\dot{V}_{A'N'}$, $\dot{V}_{B'N'}$ e $\dot{V}_{C'N'}$);
- Tensão de linha: tensão medida entre dois terminais da fonte ou carga, exceto o centro-estrela (\dot{V}_{AB} , \dot{V}_{BC} , \dot{V}_{CA} , $\dot{V}_{A'B'}$, $\dot{V}_{B'C'}$ e $\dot{V}_{C'A'}$);
- Corrente de fase: corrente que percorre cada fonte ou cada carga (elemento monofásico) (\dot{I}_{AN} , \dot{I}_{BN} , \dot{I}_{CN} , $\dot{I}_{A'N'}$, $\dot{I}_{B'N'}$ e $\dot{I}_{C'N'}$).
- Corrente de linha: corrente que percorre os condutores que alimentam a carga ($\dot{I}_{AA'}$, $\dot{I}_{BB'}$ e $\dot{I}_{CC'}$).

Ligação em estrela

Tensões e correntes de fase e de linha

- Para este arranjo, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{i}_{AA'} = \dot{i}_A = \dot{i}_{AN} = \dot{i}_{A'N'} \\ \dot{i}_{BB'} = \dot{i}_B = \dot{i}_{BN} = \dot{i}_{B'N'} \\ \dot{i}_{CC'} = \dot{i}_C = \dot{i}_{CN} = \dot{i}_{C'N'} \end{array} \right. \rightarrow [\dot{i}_A] = \frac{\dot{E}}{Z} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = [\dot{i}_{AN}] = [\dot{i}_{A'N'}]$$

- Além disso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_{AN} = \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{BN} = \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{CN} = \dot{V}_{C'N'} \end{array} \right. \rightarrow [\dot{V}_{AN}] = \dot{E} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = [\dot{V}_{A'N'}]$$

Ligação em estrela

Tensões e correntes de fase e de linha

- E:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_{AB} = \dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN} = \dot{V}_{A'N'} - \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{BC} = \dot{V}_{B'C'} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN} = \dot{V}_{B'N'} - \dot{V}_{C'N'} \\ \dot{V}_{CA} = \dot{V}_{C'A'} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN} = \dot{V}_{C'N'} - \dot{V}_{A'N'} \end{array} \right.$$

- Logo:

$$\left[\dot{V}_{AB} \right] = \dot{V}_{AB} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \dot{E} \times \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 \\ \alpha^2 - \alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix} = \dot{E} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Ligação em estrela

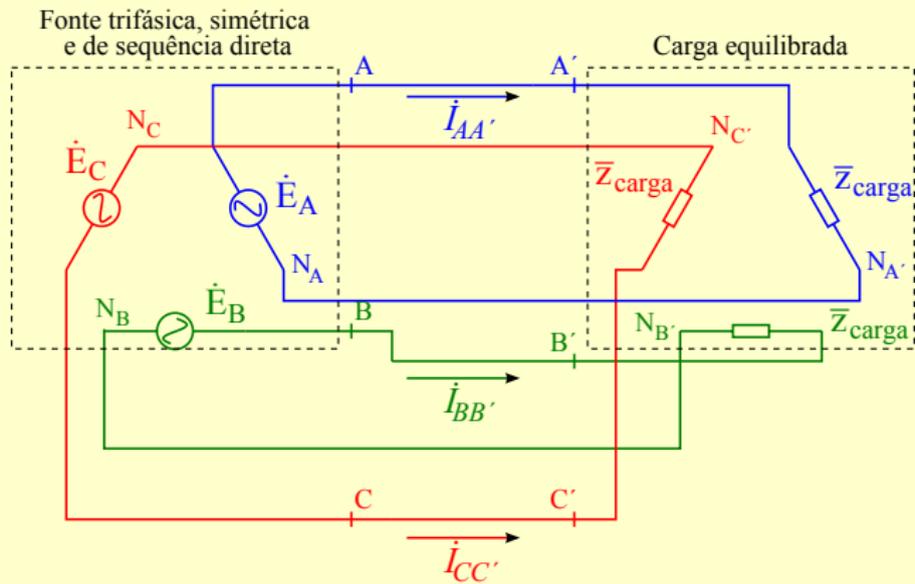
Tensões e correntes de fase e de linha

- É importante ressaltar que o processo de obtenção das tensões de fase a partir das tensões de linha resulta em uma indeterminação, a menos que se conheça o fasor da tensão entre o centro-estrela da fonte e o centro-estrela da carga. Reescrevendo a equação que relaciona tensões de linha e tensões de fase, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_{AB} = \dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN} = \dot{V}_{A'N'} - \dot{V}_{NN'} - (\dot{V}_{B'N'} - \dot{V}_{NN'}) = \dot{V}_{A'N'} - \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{BC} = \dot{V}_{B'C'} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN} = \dot{V}_{B'N'} - \dot{V}_{NN'} - (\dot{V}_{C'N'} - \dot{V}_{NN'}) = \dot{V}_{B'N'} - \dot{V}_{C'N'} \\ \dot{V}_{CA} = \dot{V}_{C'A'} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN} = \dot{V}_{C'N'} - \dot{V}_{NN'} - (\dot{V}_{A'N'} - \dot{V}_{NN'}) = \dot{V}_{C'N'} - \dot{V}_{A'N'} \end{array} \right.$$

Sistemas trifásicos

Ligação triângulo



Ligação em triângulo

Equacionamento

- Considerando que $\dot{E}_{A-NA} = \dot{E}_A = \left| \dot{E} \right| \angle 0^\circ = E \angle 0^\circ$, as tensões nos elementos do circuito \dot{V}_{AB} , \dot{V}_{BC} , \dot{V}_{CA} , $\dot{V}_{A'B'}$, $\dot{V}_{B'C'}$ e $\dot{V}_{C'A'}$ são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_A = \dot{E}_{A'} = \dot{V}_{AB} = \dot{V}_{A'B'} \\ \dot{E}_B = \dot{E}_{B'} = \dot{V}_{BC} = \dot{V}_{B'C'} \\ \dot{E}_C = \dot{E}_{C'} = \dot{V}_{CA} = \dot{V}_{C'A'} \end{array} \right. \rightarrow \left[\dot{V}_{AB} \right] = \bar{Z} \cdot \dot{I}_{A'B'} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \bar{Z} \cdot \dot{I}_{BA} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- Onde:

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{E}_{A'}}{\bar{Z}}$$

Ligação em triângulo

Definições

- Tensão de fase: tensão medida na fonte ou na carga (elemento monofásico). No caso da ligação em delta é a tensão entre os dois terminais da fonte, ou da carga (\dot{V}_{AB} , \dot{V}_{BC} , \dot{V}_{CA} , $\dot{V}_{A'B'}$, $\dot{V}_{B'C'}$ e $\dot{V}_{C'A'}$);
- Tensão de linha: tensão medida entre dois terminais da fonte ou carga (\dot{V}_{AB} , \dot{V}_{BC} , \dot{V}_{CA} , $\dot{V}_{A'B'}$, $\dot{V}_{B'C'}$ e $\dot{V}_{C'A'}$);
- Corrente de fase: corrente que percorre cada fonte ou cada carga (elemento monofásico) (\dot{I}_{AB} , \dot{I}_{BC} , \dot{I}_{CA} , $\dot{I}_{A'B'}$, $\dot{I}_{B'C'}$ e $\dot{I}_{C'A'}$).
- Corrente de linha: corrente que percorre os condutores que alimentam a carga ($\dot{I}_{AA'}$, $\dot{I}_{BB'}$ e $\dot{I}_{CC'}$).

Ligação em triângulo

Tensões e correntes de fase e de linha

- Para este arranjo, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{i}_{AA'} = \dot{i}_{BA} - \dot{i}_{AC} = \dot{i}_{A'B'} - \dot{i}_{C'A'} \\ \dot{i}_{BB'} = \dot{i}_{CB} - \dot{i}_{BA} = \dot{i}_{B'C'} - \dot{i}_{A'B'} \\ \dot{i}_{CC'} = \dot{i}_{AC} - \dot{i}_{CB} = \dot{i}_{C'A'} - \dot{i}_{B'C'} \end{cases}$$

- Logo:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{AA'} \end{bmatrix} = \dot{i}_{A'B'} \times \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha^2 - 1 \\ \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix} = \dot{i}_{A'B'} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ \times \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

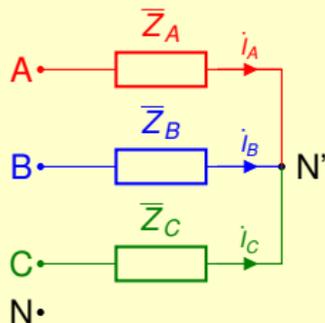
Ligação em triângulo

Tensões e correntes de fase e de linha

- É importante ressaltar que o processo de obtenção das correntes de fase a partir das correntes de linha resulta em uma indeterminação, a menos que se conheça o fasor da corrente de circulação no triângulo. Reescrevendo a equação que relaciona correntes de linha e correntes de fase, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'} = \dot{I}_{A'B'} + \dot{I}_{circ} - (\dot{I}_{C'A'} + \dot{I}_{circ}) \\ \dot{I}_{BB'} = \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'} = \dot{I}_{B'C'} + \dot{I}_{circ} - (\dot{I}_{A'B'} + \dot{I}_{circ}) \\ \dot{I}_{CC'} = \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'} = \dot{I}_{C'A'} + \dot{I}_{circ} - (\dot{I}_{B'C'} + \dot{I}_{circ}) \end{array} \right.$$

Carga em estrela com centro-estrela isolado



$$i_A = \frac{\dot{V}_{AN'}}{\bar{Z}_A} = (\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{N'N}) \cdot \bar{Y}_A$$

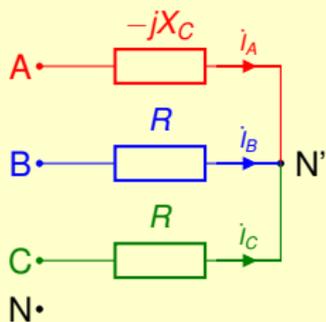
$$i_B = \frac{\dot{V}_{BN'}}{\bar{Z}_B} = (\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{N'N}) \cdot \bar{Y}_B$$

$$i_C = \frac{\dot{V}_{CN'}}{\bar{Z}_C} = (\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{N'N}) \cdot \bar{Y}_C$$

$$\dot{i}_A + \dot{i}_B + \dot{i}_C = 0 = \dot{V}_{AN} \cdot \bar{Y}_A + \dot{V}_{BN} \cdot \bar{Y}_B + \dot{V}_{CN} \cdot \bar{Y}_C - \dot{V}_{N'N}(\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C)$$

$$\dot{V}_{N'N} = \frac{\dot{V}_{AN} \cdot \bar{Y}_A + \dot{V}_{BN} \cdot \bar{Y}_B + \dot{V}_{CN} \cdot \bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C}$$

Circuito para detecção de seqüência de fases



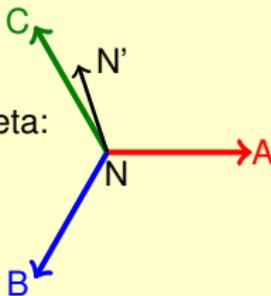
$$\text{Se } X_C = R, \quad \bar{Y}_A = \frac{1}{-jX_C} = \frac{j}{R} \quad \text{e} \quad \bar{Y}_B = \bar{Y}_C = \frac{1}{R}$$

$$\dot{V}_{N'N} = \frac{\frac{j\dot{V}_{AN}}{R} + \frac{\dot{V}_{BN}}{R} + \frac{\dot{V}_{CN}}{R}}{\frac{j}{R} + \frac{2}{R}} \times R = \frac{j\dot{V}_{AN} + \dot{V}_{BN} + \dot{V}_{CN}}{2+j}$$

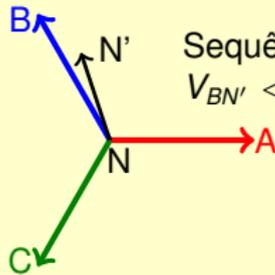
$V_{N'N}$ independe da seqüência de fases!

$$\dot{V}_{N'N} = \frac{j\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{AN}}{2+j} = \dot{V}_{AN} \frac{-1+j}{2+j} = \dot{V}_{AN} \cdot (0,63 \angle 108,4^\circ)$$

Seqüência direta:
 $V_{BN'} > V_{CN'}$



Seqüência inversa:
 $V_{BN'} < V_{CN'}$



Potência em circuitos de corrente alternada

Definições

- Potência elétrica instantânea é o resultado do produto da tensão instantânea pela corrente instantânea. Sendo assim:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

- Onde:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cos(\omega t + \delta) \quad \text{e} \quad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \gamma)$$

- Portanto:

$$p(t) = \sqrt{2} \cdot V \cos(\omega t + \delta) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \gamma)$$

Potência em circuitos de corrente alternada

Definições

- As identidades trigonométricas a seguir, podem ser empregadas na determinação da potência instantânea:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

- Somando as duas identidades:

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

Potência em circuitos de corrente alternada

Definições

- Fazendo:

$$\alpha = \omega t + \delta \quad \text{e} \quad \beta = \omega t + \gamma$$

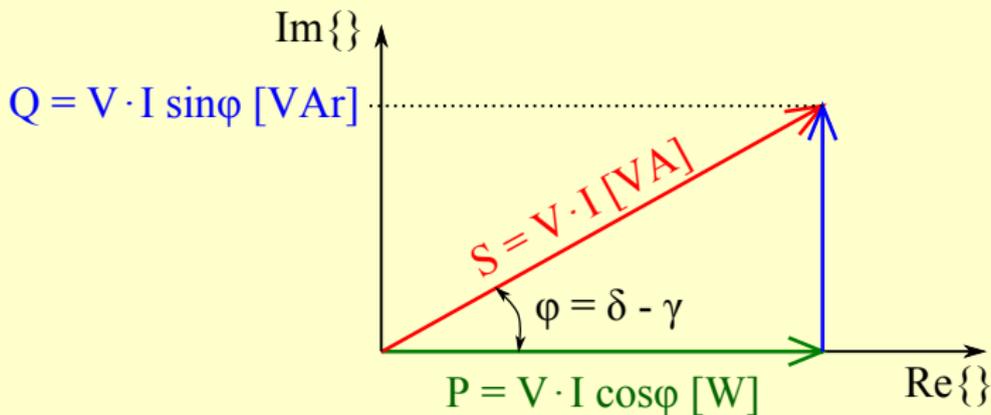
- Tem-se:

$$p(t) = V \cdot I \left[\underbrace{\cos(\delta - \gamma)}_{\text{constante}} + \underbrace{\cos(2\omega t + \delta + \gamma)}_{\text{variável}} \right]$$

Potência em circuitos de corrente alternada

Potências ativa, reativa e aparente

- A figura ilustra o triângulo de potência em um sistema monofásico.



Potência em circuitos de corrente alternada

Circuitos trifásicos

- A potência instantânea em cada uma das fases é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_A(t) = V_A \cdot I_A [\cos(\delta_A - \gamma_A) + \cos(2\omega t + \delta_A + \gamma_A)] \\ p_B(t) = V_B \cdot I_B [\cos(\delta_B - \gamma_B) + \cos(2\omega t + \delta_B + \gamma_B)] \\ p_C(t) = V_C \cdot I_C [\cos(\delta_C - \gamma_C) + \cos(2\omega t + \delta_C + \gamma_C)] \end{array} \right.$$

- A potência total instantânea é a soma das potências individuais:

$$p_{Total}(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t)$$

Potência em circuitos de corrente alternada

Circuitos trifásicos simétricos e equilibrados

- Nesse caso, as tensões e correntes têm as mesmas amplitudes nas três fases, além disso:

$$\begin{cases} \delta_A = \delta & \text{e} & \gamma_A = \gamma \\ \delta_B = \delta - 120^\circ & \text{e} & \gamma_B = \gamma - 120^\circ \\ \delta_C = \delta + 120^\circ & \text{e} & \gamma_C = \gamma + 120^\circ \end{cases}$$

- Os termos variáveis com o tempo cancelam-se mutuamente;
- $p_{Total}(t) = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos(\delta - \gamma)$ (constante no tempo)
- Portanto:

$$\begin{cases} P = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos(\delta - \gamma) = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos(\phi) \\ Q = 3 \cdot V \cdot I \cdot \sin(\delta - \gamma) = 3 \cdot V \cdot I \cdot \sin(\phi) \\ S = 3 \cdot V \cdot I \end{cases}$$

Potência em circuitos de corrente alternada

Circuitos trifásicos simétricos e equilibrados

- Ligação estrela:

$$V_{linha} = \sqrt{3}V \quad \text{e} \quad I_{linha} = I \quad \rightarrow P = \sqrt{3}V_{linha} \cdot I_{linha} \cos(\phi)$$

- Ligação triângulo:

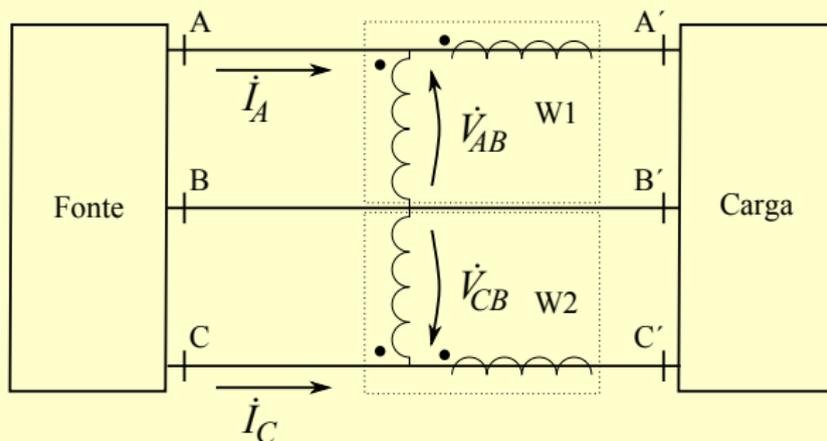
$$V_{linha} = V \quad \text{e} \quad I_{linha} = \sqrt{3}I \quad \rightarrow P = \sqrt{3}I_{linha} \cdot V_{linha} \cos(\phi)$$

Vale lembrar que o ângulo ϕ é sempre a defasagem entre a tensão de fase e a correspondente corrente de fase.

Teorema de Blondel

3 fios: Medição de potência pelo método dos dois wattímetros

- A figura ilustra uma das formas de conexão de dois wattímetros para a medição de potência ativa trifásica.



Teorema de Blondel

3 fios: Medição de potência pelo método dos dois wattímetros

- Supondo carga em estrela, a potência ativa, aferida pelos wattímetros ilustrados, é dada por:

$$\begin{cases} W_1 = \Re(\dot{V}_{AB} \cdot \dot{i}_A^*) = \Re(\dot{V}_{AN'} \cdot \dot{i}_A^* - \dot{V}_{BN'} \cdot \dot{i}_A^*) \\ W_2 = \Re(\dot{V}_{CB} \cdot \dot{i}_C^*) = \Re(\dot{V}_{CN'} \cdot \dot{i}_C^* - \dot{V}_{BN'} \cdot \dot{i}_C^*) \end{cases}$$

- Sendo assim:

$$W_1 + W_2 = \Re[\dot{V}_{AN'} \cdot \dot{i}_A^* - \dot{V}_{BN'} \cdot (\dot{i}_A^* + \dot{i}_C^*) + \dot{V}_{CN'} \cdot \dot{i}_C^*]$$

- No entanto $\dot{i}_A + \dot{i}_B + \dot{i}_C = 0$, tem-se:

$$\boxed{P_{total, trifásica} = W_1 + W_2} = \Re[\dot{V}_{AN'} \cdot \dot{i}_A^* + \dot{V}_{BN'} \cdot \dot{i}_B^* + \dot{V}_{CN'} \cdot \dot{i}_C^*]$$

Teorema de Blondel

3 fios: Medição de potência pelo método dos dois wattímetros

- Supondo carga em triângulo, a potência ativa, aferida pelos wattímetros ilustrados, é dada por:

$$\begin{cases} W_1 = \Re(\dot{V}_{AB} \cdot \dot{i}_A^*) = \Re(\dot{V}_{AB} \cdot \dot{i}_{AB}^* - \dot{V}_{AB} \cdot \dot{i}_{CA}^*) \\ W_2 = \Re(\dot{V}_{CB} \cdot \dot{i}_C^*) = \Re(\dot{V}_{CB} \cdot \dot{i}_{CA}^* - \dot{V}_{CB} \cdot \dot{i}_{BC}^*) \end{cases}$$

- Sendo assim:

$$W_1 + W_2 = \Re[\dot{V}_{AB} \cdot \dot{i}_{AB}^* - (\dot{V}_{AB} + \dot{V}_{BC}) \cdot \dot{i}_{CA}^* + \dot{V}_{BC} \cdot \dot{i}_{BC}^*]$$

- No entanto $\dot{V}_{AB} + \dot{V}_{BC} + \dot{V}_{CA} = 0$, tem-se:

$$\boxed{P_{total, trifásica} = W_1 + W_2} = \Re[\dot{V}_{AB} \cdot \dot{i}_{AB}^* + \dot{V}_{BC} \cdot \dot{i}_{BC}^* + \dot{V}_{CA} \cdot \dot{i}_{CA}^*]$$

Teorema de Blondel

3 fios: Medição de potência pelo método dos dois wattímetros

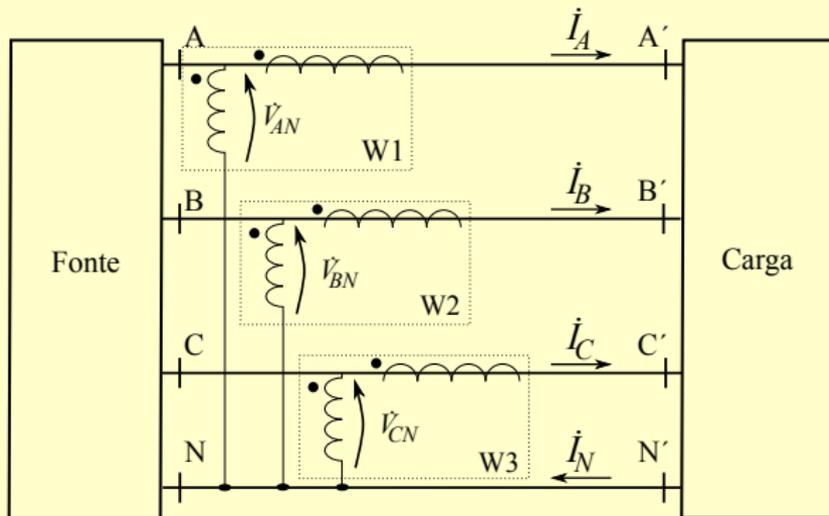
- Como visto, a aplicação do teorema independe da forma de ligação da carga;
- Outras formas de conexão:
 - $W_1 = \Re(\dot{V}_{BC} \cdot i_B^*)$; $W_2 = \Re(\dot{V}_{AC} \cdot i_A^*)$;
 - $W_1 = \Re(\dot{V}_{CA} \cdot i_C^*)$; $W_2 = \Re(\dot{V}_{BA} \cdot i_B^*)$;
- Válido também para circuitos desequilibrados, mesmo sem acesso ao centro-estrela;
- Válido também para fontes não simétricas;
- Válido para sequências de fases direta e inversa.

Teorema de Blondel - medição de potência reativa

- *Varmetro*: $Q = \text{Im}(\dot{V} \cdot i^*)$;
- O teorema de Blondel pode ser totalmente aplicado também à medição de potência reativa, substituindo os wattímetros por varmetros;
- Exemplo:

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \text{Im}(\dot{V}_{AB} \cdot i_A^*) \\ Q_2 = \text{Im}(\dot{V}_{CB} \cdot i_C^*) \end{array} \right.$$

Teorema de Blondel - circuito a 4 fios



$$P_{total, trifásica} = W_1 + W_2 + W_3$$

$$= \Re \left(\dot{V}_{AN} \cdot i_A^* + \dot{V}_{BN} \cdot i_B^* + \dot{V}_{CN} \cdot i_C^* \right)$$

$$= \Re \left(\dot{V}_{AN'} \cdot i_A^* + \dot{V}_{BN'} \cdot i_B^* + \dot{V}_{CN'} \cdot i_C^* + \dot{V}_{N'N} \cdot i_N^* \right)$$

Medição do fator de potência a partir das leituras de dois wattímetros

- Carga equilibrada, fonte simétrica;
- Sequência de fases conhecida ou natureza da carga conhecida (sinal de ϕ);
- Sequência direta:

$$W_1 = \Re(\dot{V}_{AB} \cdot \dot{i}_A^*);$$

$$W_2 = \Re(\dot{V}_{CB} \cdot \dot{i}_C^*)$$

$$W_1 = \Re((V_{AB} \angle \theta + 30^\circ) (I_A \angle \theta - \phi)^*);$$

$$W_2 = \Re((V_{AB} \angle \theta + 90^\circ) (I_A \angle \theta - \phi + 120^\circ)^*)$$

$$W_1 = V_{AB} \cdot I_A \cdot \cos(\phi + 30^\circ);$$

$$W_2 = V_{AB} \cdot I_A \cdot \cos(\phi - 30^\circ)$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\cos(\phi + 30^\circ)}{\cos(\phi - 30^\circ)} \Rightarrow W_1 \left(\cos \phi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \phi \cdot \frac{1}{2} \right) = W_2 \left(\cos \phi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \phi \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\cos \phi}{2} (\sqrt{3} W_1 - \sqrt{3} W_2) = \frac{\sin \phi}{2} (-W_1 - W_2)$$

$$\phi = \arctan \left(- \frac{\sqrt{3} (W_1 - W_2)}{W_1 + W_2} \right)$$

Medição do fator de potência a partir das leituras de dois wattímetros (cont.)

- Sequência inversa:

$$W_1 = \Re(\dot{V}_{AB} \cdot i_A^*);$$

$$W_2 = \Re(\dot{V}_{CB} \cdot i_C^*)$$

$$W_1 = \Re((V_{AB}\angle\theta - 30^\circ)(I_A\angle\theta - \phi)^*);$$

$$W_2 = \Re((V_{AB}\angle\theta - 90^\circ)(I_A\angle\theta - \phi - 120^\circ)^*)$$

$$W_1 = V_{AB} \cdot I_A \cdot \cos(\phi - 30^\circ);$$

$$W_2 = V_{AB} \cdot I_A \cdot \cos(\phi + 30^\circ)$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\cos(\phi - 30^\circ)}{\cos(\phi + 30^\circ)} \Rightarrow W_1 \left(\cos\phi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\phi \cdot \frac{1}{2} \right) = W_2 \left(\cos\phi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\phi \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\cos\phi}{2} (\sqrt{3}W_1 - \sqrt{3}W_2) = \frac{\sin\phi}{2} (W_1 + W_2)$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}(W_1 - W_2)}{W_1 + W_2} \right)$$

Medição da potência reativa a partir das leituras de um único wattímetro

- Carga equilibrada, fonte simétrica;
- Sequência de fases conhecida ou natureza da carga conhecida (sinal de ϕ);
- Sequência direta:

$$W = \Re(\dot{V}_{AB} \cdot \dot{I}_C) \quad \text{ou} \quad W = \Re(\dot{V}_{BC} \cdot \dot{I}_A) \quad \text{ou} \quad W = \Re(\dot{V}_{CA} \cdot \dot{I}_B)$$

$$W = \Re(V_{AB}\angle\theta + 30^\circ)(I_A\angle\theta - \phi + 120^\circ)^* = V_{AB} \cdot I_A \cos(\phi - 90^\circ)$$

$$W = V \cdot I \cdot \sin \phi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

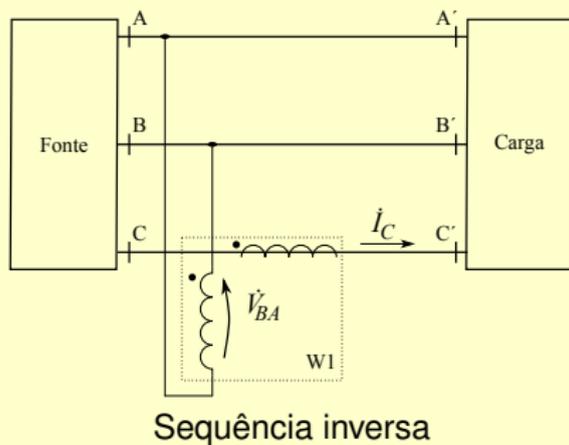
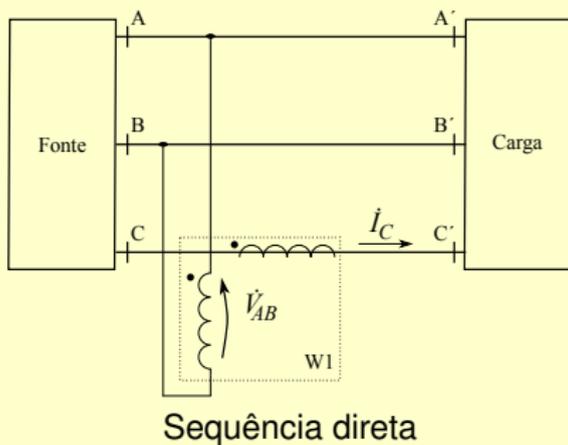
- Sequência inversa:

$$W = \Re(\dot{V}_{BA} \cdot \dot{I}_C) \quad \text{ou} \quad W = \Re(\dot{V}_{CB} \cdot \dot{I}_A) \quad \text{ou} \quad W = \Re(\dot{V}_{AC} \cdot \dot{I}_B)$$

$$W = \Re(V_{AB}\angle\theta + 150^\circ)(I_A\angle\theta - \phi - 120^\circ)^* = V_{AB} \cdot I_A \cos(\phi - 90^\circ)$$

$$W = V \cdot I \cdot \sin \phi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Medição da potência reativa a partir das leituras de um único wattímetro



OBRIGADO!

Este material é resultado da modernização dos materiais elaborados pelos professores do Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para as diversas disciplinas da área de Eletrotécnica Geral. Foi desenvolvido pelo professor Giovanni Manassero Junior, com a colaboração da professora Milana Lima dos Santos e a coordenação do professor Hernán Prieto Schmidt.

Referências:

C. B de Oliveira, H. Prieto Schmidt, N. Kagan e E. J. Robba: Introdução a sistemas elétricos de potência - componentes simétricas, 2a edição, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2000.