



Guia de Estudos¹

Objetivo deste guia

Caro aluno,

Este guia tem por objetivo prepará-lo para a atividade experimental: o estudo do fenômeno de ressonância num fio tensionado a exemplo do que ocorre com as cordas de um instrumento musical como o violão. Para isto, trataremos de alguns fundamentos motivados pela observação do fenômeno de ressonância responsável pela queda de uma ponte, por exemplo. Basta acessar o [hyperlink!](#) Em seguida, trataremos destes mesmos fundamentos num modelo simplificado de propagação de ondas em uma corda esticada através da dedução da denominada equação das cordas vibrantes, baseada na Referência [1]. Na etapa final, utilizaremos uma ferramenta de previsão para o fenômeno de ressonância num fio tensionado a partir da observação, a qual denominamos formulação empírica, para em seguida, concluirmos o estudo destacando a análise gráfica como recurso de interpretação e apresentação dos resultados experimentais.

Bom estudo!

Oscilações Forçadas e Ressonância

Sistemas que podem oscilar apresentam suas frequências naturais (ou próprias) de oscilação: tirados de suas posições de equilíbrio, passam a oscilar com a frequência natural, e na ausência de atrito, assim permanecem. Podemos forçar um sistema a oscilar aplicando uma força periódica: o sistema irá oscilar com a frequência imposta, mas a amplitude da oscilação dependerá da relação entre a frequência imposta e a frequência natural. Assim sendo, o fenômeno denominado **ressonância** ocorrerá quando a frequência imposta coincidir com a frequência natural. O sistema absorve a máxima energia e a amplitude da oscilação torna-se máxima. A Figura 1

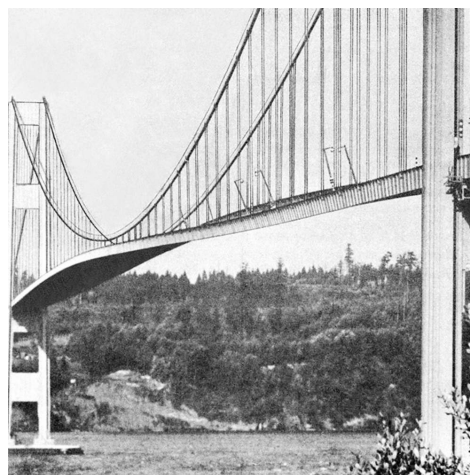


Figura 1: Ponte de *Tacoma Narrows* no momento do seu colapso, em Novembro de 1940. Créditos da imagem: *Office of Media Relations, University of Texas* .

¹M. Donadelli, Física Experimental A, IFUSP - 2019

mostra um exemplo deste fenômeno: o colapso da ponte de *Tacoma Narrows* em 1940 [2]. Atingida por ventos de 64 km/h, a ponte foi posta a oscilar violentamente e conseqüentemente torcida, antes de seu colapso final segundo a ilustração da Figura 2 e um dos vídeos que à época registraram o fato.

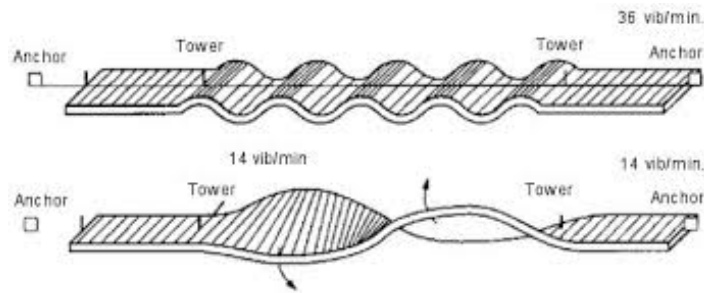


Figura 2: Ilustração do efeito de ressonância e conseqüente torção da ponte *Tacoma Narrows* [2].

O conceito de onda

O estudo de fenômenos ondulatórios está ligado a alguns dos conceitos mais importantes da física. Um dos mais fundamentais é o próprio conceito do que é uma onda. Na experiência cotidiana, as ondas mais familiares são provavelmente as ondas na superfície da água, embora constituam um dos tipos mais complexos de onda. Num sentido bastante amplo, uma onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio com velocidade definida. Em geral, fala-se de uma onda quando a transmissão do sinal entre dois pontos distantes ocorre sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro [1].

Assim, para uma onda na superfície da água, podemos associar o sinal, por exemplo, com uma crista, onde a elevação da água é máxima. A onda transporta energia e momento: uma onda provocada por uma lancha deslocando-se sobre a superfície tranquila de um lago sacode um barco distante ao atingi-lo. Entretanto, não existe transporte direto de uma dada massa de água da lancha até o barco. Um pequeno objeto flutuante mostra como se move a superfície da água na passagem da onda: para cima e para baixo, para a frente e para trás, mas permanecendo em média na mesma posição. É a forma da onda (no caso a crista) que se propaga de um ponto a outro sobre a superfície.

Nas Figura 3, está representada uma corda esticada, a cuja extremidade se aplica um impulso, sacudindo-a para cima e para baixo. O pulso se propaga como uma onda ao longo da corda, na direção x . Cada ponto da corda oscila para cima e para baixo, ou seja, a perturbação é um deslocamento na direção y , perpendicular à direção de propagação da

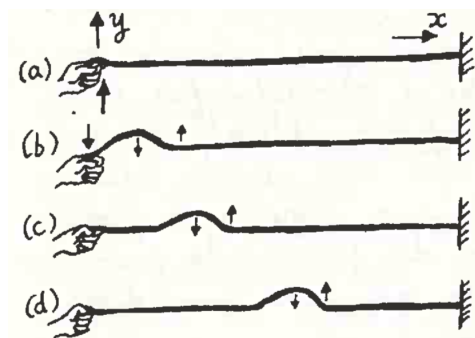


Figura 3: Onda transversal que se propaga em uma corda [1].

onda. Uma onda com esta propriedade chama-se onda transversal. Um exemplo de ondas transversais são as ondas eletromagnéticas, em que os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} em cada ponto oscilam mantendo-se sempre perpendiculares à direção de propagação como mostra a Figura 4. As ondas de luz, da mesma forma que as ondas de rádio, são ondas eletromagnéticas. O meio onde as ondas se propagam, neste caso, não precisa ser um meio material: pode ser o vácuo [1].

As ondas sísmicas, que se propagam no interior da Terra, são mais complexas: há ondas de compressão, como as ondas sonoras num fluido, que são longitudinais (a perturbação transmitida tem lugar ao longo de direção de propagação da onda); mas também há ondas associadas a tensões tangenciais (cisalhamento), que são ondas transversais, e os dois tipos de ondas se propagam com velocidades diferentes. As ondas na superfície da água não são nem longitudinais nem transversais: partículas na vizinhança da superfície descrevem trajetórias aproximadamente circulares, com componentes tanto na direção de propagação como perpendiculares a ela [1]. O nosso estudo abordará o caso mais simples, em que as ondas se propagam apenas ao longo de uma direção: é o caso das ondas transversais em uma corda.

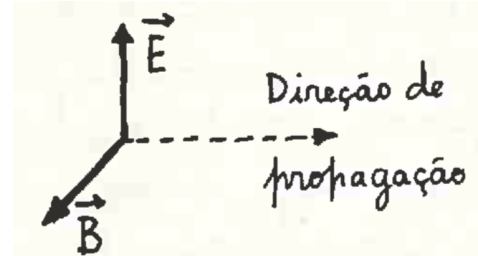


Figura 4: Onda transversal eletromagnética: os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} em cada ponto oscilam mantendo-se sempre perpendiculares à direção de propagação [1].

Ondas progressivas

O perfil da onda em uma corda num dado instante t é a forma da corda nesse instante, que é dada pela função $y(x, t)$, como mostra a Figura 5 [1]. Na figura vemos o perfil $y(x, 0)$ para $t = 0$ e o perfil no instante t . A perturbação é uma onda progressiva que se desloca como um todo para a direita, sem mudar de forma, com velocidade v . Por conseguinte, se acompanharmos a onda em outro referencial inercial $O'x'y'$, que coincide com Oxy para $t = 0$, mas que se desloca com a velocidade v da onda ao longo de Ox , o perfil da onda não muda com o tempo nesse novo referencial, ou seja,

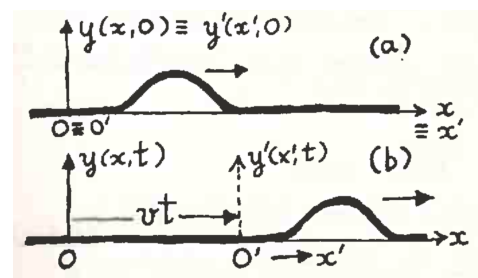


Figura 5: Perfil de uma onda progressiva que se propaga com velocidade v para a direita, sem mudar de forma [1].

$$y'(x', t) = y'(x', 0) = f(x') \quad (1)$$

é uma função somente de x' .

A relação entre os dois referenciais é dada por uma transformação de Galileu

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad (2)$$

de modo que, no referencial original,

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (3)$$

descreve uma onda progressiva que se propaga para a direita com velocidade v . O significado da Equação 3 é que y , função das duas variáveis x e t , só depende dessas variáveis através de $x' = x - vt$, podendo ser uma função qualquer de x' , como por exemplo, $\cos(kx') = \cos[k(x - vt)]$. A implicação da Equação 3 é que

$$y(x, t) = y(x + \Delta x, t + \Delta t), \quad \text{para} \quad \Delta x = v\Delta t, \quad (4)$$

ou seja, o perfil da onda no instante $t + \Delta t$ é o perfil no instante t deslocado de uma distância $\Delta x = v\Delta t$ para a direita [1].

Podemos igualmente descrever uma onda progressiva que se desloca para a esquerda, bastando para isto trocar $v \rightarrow -v$:

$$y(x, t) = g(x + vt). \quad (5)$$

Nesta expressão $g(x'')$ representa uma função arbitrária de seu argumento $x'' = x + vt$, que descreve o perfil da onda num dado instante.

Numa corda, podemos ter ondas progressivas propagando-se somente num sentido (para a direita ou para a esquerda) enquanto tais ondas não atingem as extremidades da corda. Ao atingir uma extremidade, conforme discutiremos a seguir, uma onda progressiva num sentido é geralmente refletida, gerando outra onda progressiva em sentido oposto [1]. Por conseguinte, numa corda finita, teremos em geral, simultaneamente, ondas progressivas propagando-se nos dois sentidos, para a direita e para a esquerda, ou seja,

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt). \quad (6)$$

Ondas harmônicas

Ondas harmônicas são um caso particular, bastante importante, sendo assim denominadas porque a perturbação, num dado ponto x , corresponde a uma oscilação harmônica simples [1]. O perfil da onda é uma função senoidal:

$$f(x') = A \cos(kx' + \delta), \quad (7)$$

onde x' é dado pela Equação 2 para uma onda progressiva que se propaga para a direita:

$$y(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \delta]. \quad (8)$$

A frequência angular de oscilação, num dado ponto x , é

$$\omega = kv = 2\pi f = 2\pi/\tau \quad (9)$$

onde f é a frequência e τ o período. Substituindo na Equação 8, temos

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta). \quad (10)$$

Podemos gerar uma onda deste tipo, como mostra a Figura 6, fazendo oscilar a extremidade da corda com um movimento harmônico simples (MHS). $y(0, t)$ está representado na Figura 7. A Figura 6 mostra o perfil da onda nos instantes t e $t + \Delta t$, quando terá sofrido um deslocamento para a direita de $\Delta x = v\Delta t$. Como função de x , vemos que o perfil é senoidal, ou seja, periódico, com período espacial

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (11)$$

denominado comprimento de onda e que representa, por exemplo, a distância entre duas cristas (ou dois vales) consecutivos. Substituindo a Equação 11 na Equação 9, obtemos

$$\lambda = v\tau \quad (12)$$

que expressa o fato de que a onda se desloca de $\Delta x = \lambda$ durante um período $\Delta t = \tau$.

O argumento do cosseno na Equação 10,

$$\varphi(x, t) = kx - \omega t + \delta, \quad (13)$$

é denominado fase da onda e δ a constante de fase. Se a fase for expressa em radianos [rad] e λ em metros [m], o número de onda k será expresso em rad/m e ω em rad/s. A amplitude de oscilação A na Equação 10 é denominada amplitude da onda.

Se acompanharmos o deslocamento com o tempo de um ponto onde a fase é constante,

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 = \text{constante}, \quad (14)$$

teremos, derivando a Equação 14 em relação ao tempo,

$$\frac{d\varphi}{dt} = k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad (15)$$

ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v = \lambda f. \quad (16)$$

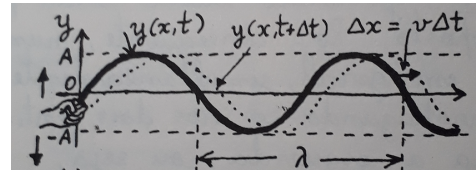


Figura 6: Perfil de uma onda harmônica [1].

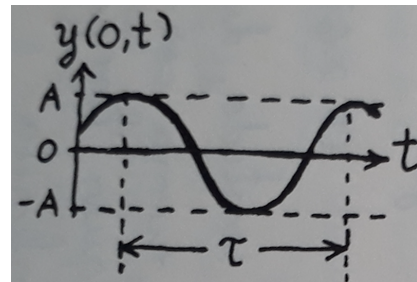


Figura 7: Período temporal de uma onda harmônica [1].

Um ponto onde a fase é constante (correspondendo, por exemplo, a uma crista de onda, com $\varphi = 2\pi$), desloca-se portanto com a velocidade v da onda; por isto, v é denominado velocidade de fase [1].

A Equação 10 de uma onda harmônica também pode ser escrita usando a notação complexa:

$$y(x, t) = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \delta)}]. \quad (17)$$

A equação de ondas unidimensional

A Equação 3 é a expressão geral de uma onda progressiva que se propaga para a direita:

$$y(x, t) = f(x'), \quad x' = x - vt. \quad (18)$$

Para podermos associar uma equação de movimento com a propagação da onda, vamos calcular a aceleração num dado ponto x . A velocidade e a aceleração em x são obtidas fixando-se x e derivando em relação ao tempo, o que corresponde a tomar derivadas parciais [1]. No caso da corda por exemplo, a velocidade com que o ponto x se desloca verticalmente na direção y no instante t é

$$\text{velocidade} = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) \quad (19)$$

e a aceleração,

$$\text{aceleração} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t). \quad (20)$$

Pela Equação 18, y só depende de t através da variável $x' = x - vt$ (função de função), de forma que as derivadas serão calculadas a partir da regra da cadeia:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df}{dx'}, \quad (21)$$

de onde $\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - vt) = -v$. De maneira análoga,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df}{dx'} \right) = -v \frac{d}{dx'} \left(\frac{df}{dx'} \right) \frac{\partial x'}{\partial t},$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2}. \quad (22)$$

de onde $\frac{\partial x'}{\partial x} = -v$. Por outro lado, como $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - vt) = 1$, temos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2}. \quad (23)$$

Se compararmos as Equações 22 e 23, veremos que $y(x, t)$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (24)$$

denominada equação de ondas unidimensional, que é uma das equações fundamentais da física [1]. Se tomarmos em lugar da Equação 18 uma onda progressiva que se propaga para a esquerda

$$y(x, t) = g(x''), \quad x'' = x + vt, \quad (25)$$

isto equivale a trocar $v \rightarrow -v$ e $x' \rightarrow x''$ na Equação 21. As Equações 22 e 23 permanecem válidas, com $x' \rightarrow x''$. Logo, a Equação 25 também é solução da equação de ondas unidimensional, o mesmo valendo para a Equação 6 [1]. A equação de ondas unidimensional é uma equação a derivadas parciais linear de 2ª ordem. Mostraremos a seguir que as oscilações transversais de uma corda vibrante são governadas por esta equação.

A equação das cordas vibrantes

Uma corda distendida é submetida a oscilações transversais como as que encontramos em instrumentos musicais de cordas (violão, piano, violino, harpa, etc...).

A posição de equilíbrio numa corda esticada como a da Figura 8 será a direção Ox e nesta situação, a porção da corda à esquerda de um ponto qualquer exerce sobre a porção da direita uma força $-T$ dirigida para a esquerda, e equilibrada pela força T com que a porção direita atua sobre a da esquerda. Isto define a força tensora ou tensão de equilíbrio T , constante ao longo da corda, que é suposta uniforme [1].

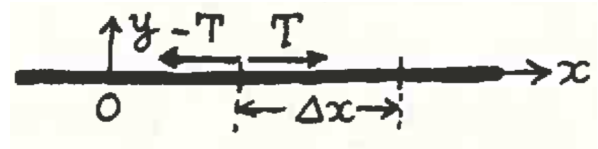


Figura 8: Força tensora numa porção da corda [1].

Seja μ a densidade linear de massa da corda: um elemento de comprimento infinitésimo Δx da corda possui massa:

$$\Delta m = \mu \Delta x. \quad (26)$$

Um deslocamento transversal de um ponto x da corda teria geralmente duas componentes (y e z), mas para nossos objetivos, vamos nos limitar a deslocamentos num dado plano, que podemos tomar como o plano Oxy .

O deslocamento de um ponto x da corda de sua posição de equilíbrio será então $y(x, t)$. Podemos pensar na corda como um caso limite de um sistema de partículas acopladas por molas (que transmitem a tensão). Vamos nos limitar a pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio, de tal forma que, a variação de comprimento da corda seja desprezível, e a magnitude da tensão permanece igual a T com muito boa aproximação. As forças que atuam sobre um elemento Δx da corda serão devidas à variação de direção da tensão, que introduz uma componente transversal de força restauradora na direção y .

Conforme mostra a Figura 9, a componente y da tensão no ponto $x + \Delta x$, devida à porção da corda à direita de $x + \Delta x$ é dada por

$$T \sin \theta \approx T \tan \theta = T \frac{\partial y}{\partial x'}, \quad (27)$$

onde θ é o ângulo entre a tangente à corda e o eixo Ox . A aproximação para pequenos

deslocamentos implica $\theta \ll 1$ e $\sin \theta \approx \tan \theta$, que é o coeficiente angular do perfil da corda, dado por $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Na Equação 27, todas as grandezas são calculadas no ponto $x + \Delta x$ da corda. No ponto x , conforme mostra a Figura 9, temos uma força análoga mas de sinal contrário, devida à porção da corda à esquerda de x . Logo, a força vertical resultante sobre o elemento Δx da corda é dada por

$$T \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = T \Delta x \left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right], \quad (28)$$

onde o 1º termo é a força expressa na Equação 27 no ponto $x + \Delta x$ e o 2º termo é a força análoga no ponto x . Para Δx infinitésimo, a expressão entre colchetes na Equação 28 pode ser substituída por $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$, de modo a se obter

$$\text{força vertical sobre } \Delta x = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x. \quad (29)$$

Pela 2ª lei de Newton, esta força é o produto da massa de Δx dada pela Equação 26 pela aceleração desse elemento da corda, dada pela Equação 20. Logo, a equação de movimento da corda é

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Delta x,$$

ou seja,

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (30)$$

o que equivale à Equação 24, a equação de ondas unidimensional com

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (31)$$

como expressão da velocidade de propagação.

A Equação 30 é a equação das cordas vibrantes, obtida por Euler e D'Alembert por volta de 1750. A velocidade de onda da Equação 31 será tanto maior quanto maior for a força tensora e menor a massa por unidade de comprimento [1].

Modos normais de oscilação de um fio tensionado

No caso particular de um fio tensionado de comprimento L fixo em ambas as extremidades, no qual aplicamos uma perturbação transversal ao fio e periódica, observamos o fenômeno de ressonância toda vez que a frequência da perturbação externa for igual a uma das frequências próprias do fio tensionado.

Para determinar quais são as frequências de ressonância desse arranjo, devemos recordar a correspondência entre a frequência de oscilação f de uma onda qualquer com o seu comprimento de onda λ . Essa correspondência depende da velocidade de propagação da onda

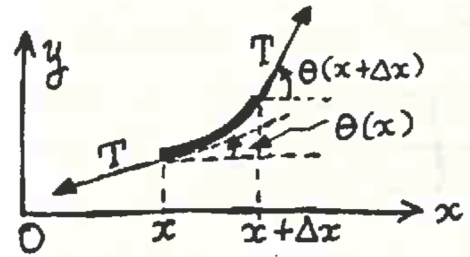


Figura 9: Variação da direção da força tensora numa porção da corda [1].

e é dada pela Equação 16. A determinação dos possíveis comprimentos de onda pode ser realizada com argumentos puramente geométricos [1]. Na Figura 10 são mostrados alguns modos de vibração possíveis para um fio de comprimento L preso em ambas as extremidades. Da Figura 10 pode-se extrair que o comprimento de onda está relacionado ao modo de vibração, bem como ao comprimento do fio, segundo a expressão

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (32)$$

com $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Nesse caso, o índice n em λ_n representa o modo de vibração observado. Para um fio fixo e de comprimento L , as frequências naturais de vibração podem ser escritas através da expressão

$$f_n = \frac{nv}{2L}, \quad (33)$$

com $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. A velocidade de propagação da onda no fio depende das suas propriedades e da tensão longitudinal expressos na Equação 31. Desta forma, as frequências naturais de vibração de um fio tensionado são dadas por

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (34)$$

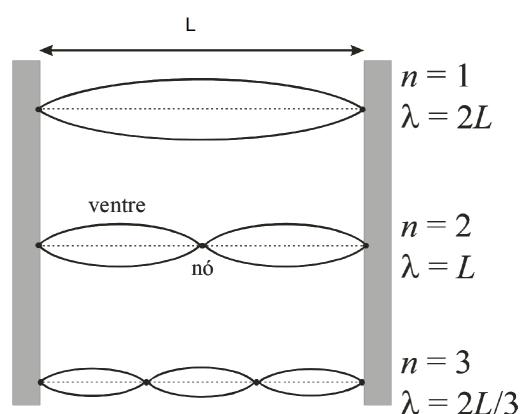


Figura 10: Modos normais de vibração de um fio de comprimento L .

Formulação empírica

Costuma-se determinar fórmulas empíricas que possibilitem a previsão de uma grandeza física quando o objeto estudado encontra-se em alguma configuração pré-estabelecida. Nesse contexto, uma fórmula empírica não pode ser considerada uma explicação física do fenômeno estudado, mas apenas uma ferramenta de previsão para esse fenômeno. A partir da observação, estabeleceremos quais parâmetros influenciam a grandeza estudada. Uma vez confirmada a lista de parâmetros, estuda-se, através de medidas, a dependência da grandeza física com cada um desses parâmetros, mantendo-se todos os outros fixos. Em seguida, todos os dados obtidos são analisados com o intuito de extrair uma expressão que permita prever o valor da grandeza estudada para um determinado conjunto de parâmetros.

Nesta atividade experimental, realizaremos o estudo do fenômeno de ressonância de um fio tensionado com o objetivo de obter uma expressão que relacione as frequências de ressonância observadas com os parâmetros do experimento.

Vimos que quando um fio tensionado é posto a vibrar, dependendo da frequência de vibração utilizada, o fio pode entrar em um estado de ressonância, na qual a amplitude da vibração torna-se bastante elevada. As frequências nas quais a ressonância é observada dependem de vários parâmetros do fio. Esse é o efeito que permite, por exemplo, que vários instrumentos musicais funcionem, como o violão, o piano, etc. No caso do violão, em geral de seis cordas, cada corda vibra em uma frequência de ressonância bem estabelecida (notas musicais). Para gerar as diferentes notas, cada corda possui características físicas diferentes, como o material de que é construída, sua espessura, etc. Além disso, outros fatores, como o comprimento da corda e a tensão aplicada à mesma influenciam a frequência de ressonância. Assim, para obter uma expressão que possibilite prever a frequência de ressonância de uma corda deve-se estudar como a frequência varia com cada um desses parâmetros.

Supondo que uma fórmula empírica consiste na dependência de uma grandeza (y) com um determinado parâmetro (x) temos a expressão:

$$f(x) = Ax^b, \quad (35)$$

onde A, b são constantes.

Tomando o violão por exemplo, os parâmetros que podem influenciar a frequência de vibração do fio são: a força tensora aplicada T , o comprimento L , e as suas características de construção. Podemos representar essas características de construção através da densidade linear do fio μ ($\mu = \frac{M}{L}$, sendo M a massa do fio). Assim, uma primeira aproximação para uma expressão que correlacione a frequência de ressonância com esses parâmetros pode ser escrita como:

$$f = AL^\beta T^\gamma \mu^\delta, \quad (36)$$

onde A, β, γ, δ são constantes.

Quando observamos uma corda de violão, percebemos que devido à sua construção, outras frequências, além da frequência natural de ressonância, ou "tom fundamental", podem ser obtidas. Como a corda está presa em ambas as extremidades, além da frequência natural, frequências de meio tom também são possíveis de serem obtidas, esquematicamente representado na Figura 10. Pitágoras já havia descoberto, no século VI a.C., que sons musicais harmoniosos são emitidos por uma corda vibrante cujo comprimento é dividido segundo proporções simples, o que altera na mesma proporção a frequência do tom fundamental da corda [1]. O modo mais simples de vibração é aquele no qual a corda se movimenta totalmente em fase. Costuma-se denominar essa frequência de "frequência natural de vibração". Um segundo modo de vibração, no qual podemos dividir a corda ao meio e que cada metade se movimenta em oposição de fase também é possível, pois a corda permanece fixa em suas extremidades e assim sucessivamente, conforme mostra a mesma figura. Cada um desses modos é representado por um número, correspondente ao número de ventres (máximos de vibração) observados. Assim, o primeiro modo de vibração possui $n = 1$, o segundo, $n = 2$ e assim indefinidamente. Com base nesses argumentos é de se esperar que a frequência de vibração de um fio também dependa do modo de vibração observado. Assim, a fórmula

empírica para as frequências de ressonância pode ser escrita como:

$$f_n = Cn^\alpha L^\beta T^\gamma \mu^\delta, \quad (37)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes que podem ser extraídas dos dados experimentais.

Interpretação gráfica

A análise gráfica de resultados de um ensaio de uma corda que ressoa em frequência variando n, L, T e μ é um pouco mais elaborada que uma simples regressão linear. Dado que todos os parâmetros são multiplicativos, podemos calcular o logaritmo da Equação 37 e assim, poder separar a equação numa soma de parâmetros. Para simplificar esse procedimento, podemos usar o papel di-log, que converte a medida em seu logaritmo e permite que possamos fazer o gráfico das potências como se fossem retas.

A escala em papel log é fixa. Você pode apenas mudar a potência de dez. No caso ilustrado na Figura 11, decidimos começar com 1 e terminar com 1000. Poderíamos ter começado com 10^{-6} e terminado com 10^{-3} , ou 10^5 e 10^8 . São três décadas, em qualquer caso. Para anotar um ponto na escala log, procura-se o valor no eixo (as escalas variam). Na Figura 11 anotamos o ponto (4,28) como exemplo. A escala do papel foi desenhada de tal forma que a posição do ponto corresponde ao logaritmo de seu valor, como indicado pelas setas. Isso evita calcular o log dos valores. O papel faz isso para o usuário.

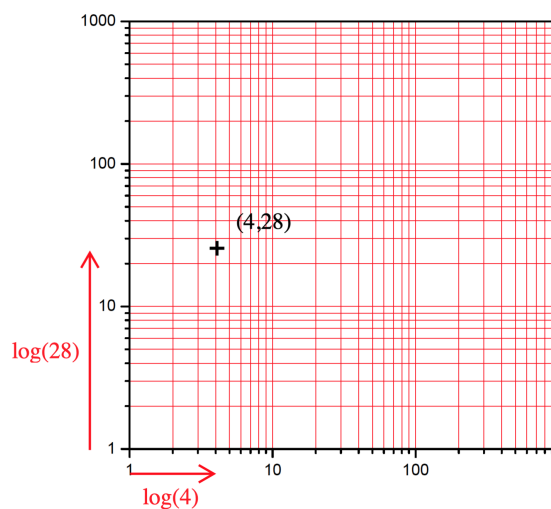


Figura 11: Papel di-log.

Uma vez que no papel log representamos o logaritmo dos valores, ao graficar as potências multiplicativas, voltamos ao problema da equação de uma reta. Para se obter a constante multiplicativa da Equação 35, por exemplo, deve-se seguir um procedimento análogo ao da obtenção do coeficiente linear em um gráfico no papel milimetrado, ou seja, deve-se localizar o ponto no qual a curva que descreve a função corta o eixo das ordenadas (y) no valor da abscissa (x) igual a zero. No caso do papel di-log, o eixo das ordenadas corresponde a $\log(y)$ e o eixo das abscissas corresponde a $\log(x)$:

$$\log y = \log f(x) = \log[Ax^b] = \log A + b \log(x) \quad (38)$$

Logo, quando procuramos o coeficiente linear da reta que ajusta a linearização da função na escala di-log, estamos de fato procurando o valor no eixo $\log(y)$, que corresponde a $\log(x) = 0$, ou seja, na escala logarítmica corresponde ao valor 1, já que $\log(1) = 0$. Se o eixo $x = \log(1)$ não estiver visível, teremos que extrapolar a reta, da mesma forma que faríamos num gráfico linear em que o eixo $x = 0$ está fora de vista.

Em nossa atividade experimental faremos o estudo da dependência da frequência de ressonância como o modo de vibração n , em um fio tensionado e preso em suas extremidades, a partir do gráfico em papel di-log, cuja expressão empírica, à semelhança da Equação 35 se escreve:

$$f_n = Kn^\alpha. \quad (39)$$

Cada parâmetro pode ser variado de maneira individual, no caso n , com os outros mantidos fixos, compondo a constante K . Como o gráfico desta função no papel di-log resulta numa reta, pode-se traçar a reta média para a determinação dos coeficientes angular e linear, bem como calcular as incertezas nos coeficientes como mostra a Figura 12. Depois de desenhadas as retas e ajustadas aos dados, o coeficiente angular pode ser calculado a partir de dois pontos quaisquer sobre a reta ajustada (x_1, y_1) e (x_2, y_2) utilizando a expressão:

$$\alpha = \frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_1 - \log x_2} = \frac{\Delta y / L_y}{\Delta x / L_x}, \quad (40)$$

ou simplesmente, medindo-se a distância em centímetros, entre os pontos y_1 e y_2 (Δy) x_1 e x_2 (Δx), bem como o tamanho das décadas no gráfico L_y e L_x .

Alternativamente, o gráfico em escala di-log de $f_n(n)$ ou de quaisquer outros parâmetros do fio que obedecem à formulação empírica da Equação 37, podem ser feitos utilizando o programa Origin[®], por exemplo.

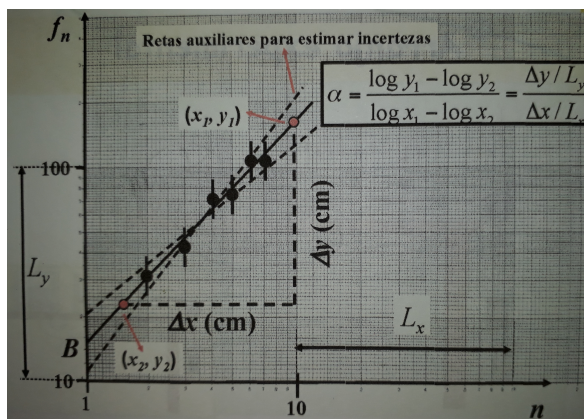


Figura 12: Utilização do papel di-log.

Referências

- [1] M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 2. Editora Edgard Blucher Ltda.
- [2] A. Harish, *Why the Tacoma Narrows Bridge Collapsed: An Engineering Analysis*, 2019.
<https://www.simscale.com/blog/2018/07/tacoma-narrows-bridge-collapse/>.