Lista 6 - Relatividade

1- Podemos relacionar o movimento da fonte ao observador como

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}$$

O aumento de um fator de quatro na frequência observada induz que $\frac{f}{f_0} = 4$

Logo $4 = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}$

$16 = \frac{c+u}{c-u} \Rightarrow 16c - 16u = c + u \Rightarrow 15c = 17u$

$u = \frac{15c}{17}$

$\underline{u = 0,882\,c}$ //

2- Sua energia cinética $K = 0,420\,MeV$

e sua energia de repouso $E_0 = m_0c^2 = 0,511\,MeV/c^2 . c^2$

$E_0 = 0,511\,MeV$

Logo sua energia total é $E = E_0 + K = (0,511 + 0,420)\,MeV$

$\underline{E = 0,931\,MeV}$ //

A expressão da energia cinética é:

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) m_0c^2 \Rightarrow \frac{K}{m_0c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} = \left(\frac{K + m_0c^2}{m_0c^2}\right)^2 \Rightarrow 1 - v^2/c^2 = \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2}\right)^2$$

$$v^2/c^2 = 1 - \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2}\right)^2 \Rightarrow v^2 = c^2\left(1 - \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2}\right)^2\right)$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{K + m_0c^2}\right)^2}$$

substituindo os valores $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{0,511}{0,931}\right)^2}$

$v = 0,836\,c$

3- para você o tempo que o astronauta percorra $1,20 \cdot 10^8$ m a mais que você foi:

$\Delta t = \frac{\Delta S}{v} = \frac{1,2 \cdot 10^8}{0,8 \cdot 3 \cdot 10^8} = 0,5\,s$

no referencial do astronauta, esse tempo foi:

$\Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,5\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}$

$\Delta t_0 = 0,3\,s$

no referencial do astronauta, a distância percorrida foi:

$S = S_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1,2 \cdot 10^8\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}$

$S = 0,72 \cdot 10^8\,m$

4- no referencial da partícula a distância até a terra:

$h = h_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 45 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,99540c)^2}{c^2}}$

$h = 4,3\,km$

para o cientista o tem que a partícula levará pra chegar a terra

$\Delta t = \frac{45000}{0,99540 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,5 \cdot 10^{-4}\,s$

no referencial da partícula esse tempo é:

$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta t_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}\sqrt{1 - \frac{(0,99540c)^2}{c^2}}$

$\Delta t_0 \cong 1,4 \cdot 10^{-4}\,s$

Scanned by CamScanner

5- Usando relatividade restrita para relação das velocidades.

$$v' = \frac{v-u}{1-uv/c^2}$$

onde v' é a velocidade do foguete em relação à nave, v é a velocidade do foguete em relação ao planeta e u é a velocidade da nave em relação ao planeta.

Logo, $v' - \frac{uv'v}{c^2} = v - u$

$$v' - v = \frac{uv'v}{c^2} - u$$

$$u\left(\frac{v'v}{c^2} - 1\right) = v' - v \Rightarrow u = \frac{v'-v}{v'v/c^2 - 1}$$

substituindo os valores: $u = \frac{0,920c - 0,360c}{0,920 \cdot 0,360c^2/c^2 - 1}$

$$u = \frac{0,56c}{-0,6688} \Rightarrow u = -0,837c$$ //

6- $E = K + mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + (pc)^2}$

$$(K + mc^2)^2 = m^2c^4 + (pc)^2$$

$$K^2 + 2mc^2K + \cancel{m^2c^4} = \cancel{m^2c^4} + (pc)^2$$

$$p = \frac{\sqrt{K^2 + 2mc^2K}}{c}$$ //

7- $K = (\gamma - 1)m_0c^2$

$$\gamma = \frac{K}{m_0c^2} + 1 \Rightarrow \gamma = \frac{10^9 eV}{0,511 \cdot 10^6 eV} + 1 = 1,957 \cdot 10^3 + 1$$

$$\gamma = 1,958 \cdot 10^3$$

mas, $m = \gamma m_0$

$\therefore \frac{m}{m_0} = \gamma \Rightarrow \frac{m}{m_0} \cong 1{,}96 \cdot 10^3$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow 1 - v^2/c^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$

Logo, $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

substituindo valor de γ

$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}96 \cdot 10^3)^2}}$

$\therefore \frac{v}{c} = 1 - 0{,}26 \cdot 10^{-6}$

$\frac{v}{c} \cong 0{,}99999987$

8- A energia total é dada pela expressão:

$E = \sqrt{m^2 c^4 + (pc)^2}$

é conhecido que mc^2 do elétron é 0,511 MeV e é dado que pc é 0,60 MeV

Logo $E = \sqrt{(0{,}511 \cdot 10^6)^2 + (0{,}6 \cdot 10^6)^2}$

$E = \sqrt{0{,}261121 + 0{,}36} \cdot 10^6$

$E \cong 0{,}79$ MeV

sabe-se que o fator de Lorentz: $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$

Logo, $\gamma = \frac{0{,}79}{0{,}511} \Rightarrow \gamma \cong 1{,}55$

mas, pelo exercício 7, $v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cdot c$

$v = \sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}55)^2}} \, c \Rightarrow v = 0{,}76 \cdot c$

9- $E = K + mc^2$

• Para um elétron mc^2 é 0,511 e é dado $E = 5,0 MeV$

$5,0 = 0,511 + K_e \Rightarrow K_e = 4,489 \ MeV$

• Para um próton com $E = 2 \cdot 10^3 MeV$ é conhecido que mc^2 é 938 MeV

Então: $2 \cdot 10^3 = 938 + K_p$

$K_p = 1062 \ MeV$

Pelo resultado da questão 6, sabemos que:

$$p = \frac{\sqrt{K^2 + 2mc^2K}}{c}$$

• Para o elétron:

$$p_e c = \sqrt{4,489^2 + 2 \cdot 0,511 \cdot 4,489} = \sqrt{20,15 + 4,58}$$

$$p_e c = 4,97 \ MeV$$

• Para o próton:

$$p_p c = \sqrt{1062^2 + 2 \cdot 938 \cdot 1062} = \sqrt{1\ 127\ 844 + 1\ 992\ 312}$$

$$p_p c = 1766 \ MeV$$

10- Sabemos que $\gamma = \frac{E}{mc^2}$

• Para o elétron:

$$\gamma_e = \frac{5}{0,511} = 9,785$$

• Para o próton:

$$\gamma_p = \frac{2000}{938} = 2,132$$

Pelo exercício 7, sabemos que: $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

FORONI

• para o elétron:

$$\frac{v_e}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{9{,}785^2}} \Rightarrow \boxed{v_e \cong 0{,}995c}$$

• para o próton:

$$\frac{v_p}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{2{,}132^2}} \Rightarrow \boxed{v_p = 0{,}883c}$$