Lista 5 - Difração

1 - Os mínimos de uma difração se comportam com:

$$a \cdot \operatorname{sen}\theta = m\lambda$$

E no anteparo, essas posições são dadas por:

$$y = D \cdot \operatorname{tg}\theta$$

onde D é a distância do anteparo à fenda e y a posição do mínimo em relação ao ponto central.
Considerando θ pequeno é possível aproximar $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad y_m = \frac{m\lambda D}{a}$$

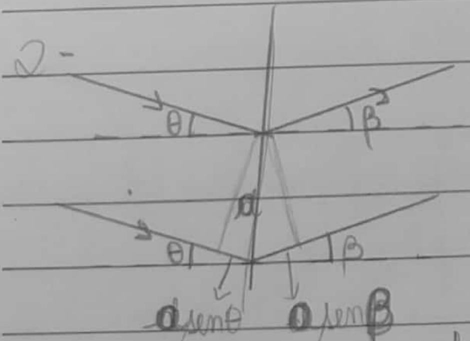
Só que, $D = 40\,cm$, $\lambda = 6000\,Å$
$\lambda_4 - \lambda_1 = 4\,mm$

Substituindo esses valores

$$y_4 - y_1 = \frac{4 \cdot 6000 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 6000 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}4}{a} = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$$

$$a = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}4}{0{,}4 \cdot 10^{-3}} = 18 \cdot 10^{-4}\,m$$

2 -



d sen θ e d sen β são as diferenças nos caminhos.
Pela diferença total temos
$$a\operatorname{sen}\theta + a\operatorname{sen}\beta = m\lambda$$

Logo: $$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} - \operatorname{sen}\beta$$

$y_m = f \cdot \operatorname{tg}\theta$ considerando novamente θ pequeno, ou seja, $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta$

$$y_m = f \cdot \left(\frac{m\lambda}{a} - \operatorname{sen}\beta\right)$$

Só que, $a = 0{,}02\,mm = 2 \cdot 10^{-5}\,m$, $\beta = 30°$, $f = 80\,cm = 0{,}8\,m$
$\lambda = 6.000\,Å = 6 \cdot 10^{-7}\,m$

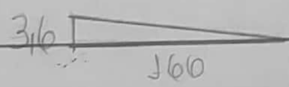
$$y_3 = \left(\frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-5}} - \text{sen } 30°\right) \cdot 0{,}8$$

$$y_3 = \left(9 \cdot 10^{-2} - 0{,}5\right) \cdot 0{,}8 = (0{,}09 - 0{,}5) \cdot 0{,}8$$

$$y_3 = -0{,}41 \cdot 0{,}8 \Rightarrow \underline{y_3 = -0{,}328 \text{ m}}$$

3- Usando critério de Rayleigh, onde o ângulo θ_R é a menor separação angular para qual a resolução é possível e d é o diâmetro da lente:

$$\theta_R \cong \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{d} \Rightarrow d = \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{\theta_R}$$



para θ_R pequeno, $\theta_R \cong tg\,\theta = \frac{3{,}6}{160 \cdot 10^3}$

Logo $\theta_R \cong 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ rad

Então, $d = \frac{1{,}22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10}}{2{,}25 \cdot 10^{-5}} = 2{,}98 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-5}$ m

$$\underline{d = 2{,}98 \text{ cm}}$$

4- O argumento responsável pela formação de mínimos para uma interferência de fenda dupla é:

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \,\text{sen}\,\theta$$

E o argumento que fornece o primeiro mínimo da difração é: $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \text{sen}\,\theta$

Logo: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{a}$ como existem 9 franjas:

$$2m + 1 = 9 \Rightarrow m = 4$$

Escrevendo $\beta = \pi(m + 1/2)$ temos a condição de formação de mínimos. Esta relação deve coincidir com o primeiro mínimo de $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$, ou seja, $\alpha = \pi$

Logo, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{a} = m + \frac{1}{2}$

$a = 30.000 \text{Å}$ e $m = 4$

Então $d = 30.000 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{9}{2} \Rightarrow d = 135.000 \cdot 10^{-10} m$

$d = 135.000 \text{Å}$ //

5- Na segunda envoltória, temos α entre π e 2π.

Como $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{a} = \frac{9}{2} \Rightarrow \beta = \frac{9}{2}\alpha$

$\beta_1 = \frac{9\pi}{2}$ e $\beta_2 = \frac{9}{2} \cdot 2\pi \Rightarrow \beta_2 = 9\pi$

Porém, $\beta = \pi(m + 1/2)$

$\frac{9}{2}\pi = \pi\left(m_1 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow m_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow m_1 = 4$ //

e $9\pi = \pi\left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow m_2 = 9 - \frac{1}{2} = \frac{18}{2} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{17}{2}$ //

Tomando a diferença entre m_2 e m_1:

$m_2 - m_1 = \frac{17}{2} - 4 = \frac{17}{2} - \frac{8}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow 4,5$

Temos 4 franjas completas

6- O campo elétrico resultante das três fendas é:

$E = E_1 + E_2 + E_2$

onde E_1, E_2 e E_3 são os componentes das fendas 1, 2 e 3.

respectivamente.

Podemos definir cada campo como:

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$
$$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$
$$E_3 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 2\phi)$$

Então, $E = E_0 [\operatorname{sen}(\omega t) + \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \operatorname{sen}(\omega t + 2\phi)]$

Só que: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\therefore \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$

e $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\therefore \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Logo, $E = E_0 [\operatorname{sen}\omega t + \operatorname{sen}\omega t \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \cos\omega t + \operatorname{sen}\omega t \cos 2\phi + \operatorname{sen} 2\phi \cos\omega t]$

$E = E_0 \operatorname{sen}\omega t + E_0 \operatorname{sen}\omega t \cos\phi + E_0 \cos\omega t \operatorname{sen}\phi + E_0 \operatorname{sen}\omega t (2\cos^2\phi - 1) + E_0 \cos\omega t . 2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi$

$E = E_0 \operatorname{sen}\omega t + E_0 \operatorname{sen}\omega t(\cos\phi(1 + 2\cos\phi)) - E_0 \operatorname{sen}\omega t + E_0 \cos\omega t(\operatorname{sen}\phi(1 + 2\cos\phi))$

$E = E_0 (1 + 2\cos\phi)[\operatorname{sen}\omega t \cos\phi + \cos\omega t \operatorname{sen}\phi]$

$E = \underbrace{E_0 (1 + 2\cos\phi)}_{E_\theta}[\operatorname{sen}(\omega t + \phi)]$

Então $E = E_\theta \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ onde $E_\theta = E_0(1 + 2\cos\phi)$

Sabendo que a intensidade é proporcional ao quadrado do campo elétrico:

$$I \propto E_\theta^2 = E_0^2 (1 + 2\cos\phi)^2$$
$$= E_0^2 (1 + 4\cos\phi + 4\cos^2\phi)$$

Para $\phi = 0$, temos $\cos\phi = 1$ e I_θ máximo (I_m)

$$I_m \propto 9E_0^2 \Rightarrow E_0^2 \propto I_{\theta m}/9$$

Logo $I_\theta = \frac{I_m}{9}(1 + 4\cos\phi + 4\cos^2\phi)$

7 - Sabemos que $d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$

logo $\lambda = \frac{d \operatorname{sen}\theta}{m}$

variando em relação a θ: $\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d \cos\theta}{m}$

Para variações pequenas: $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\theta} = \frac{d \cos\theta}{m}$

$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda\, m}{d \cos\theta}$

$\rightarrow d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d}$

$\rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$

$= 1 - \frac{m^2\lambda^2}{d^2} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{m^2\lambda^2}{d^2}}$

Logo: $\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda\, m}{d\sqrt{1 - \frac{m^2\lambda^2}{d^2}}} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{\frac{d^2}{m^2} - \lambda^2}}$

8- Sabemos que $2d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$

onde m são os máximos

- para $m = 1$:

$2 \cdot 2{,}52 \cdot 10^{-10} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 = 1 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-10}$

$5{,}04 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 = 1{,}25$

$\operatorname{sen}\theta_1 \cong 0{,}248$

$\theta_1 \cong 14{,}36°$

Teremos que girar o cristal no sentido horário em um ângulo: $45° - \alpha_1 = 14{,}36°$

$\alpha_1 \cong 30{,}64°$

- para $m = 2$:

$2 \cdot 2{,}52 \, sen\,\theta_2 = 2 \cdot 1{,}25$

$sen\,\theta_2 = \frac{2{,}50}{5{,}04} \Rightarrow sen\,\theta_2 \cong 0{,}496$

$\theta_2 \cong 29{,}74°$

teremos que girar no sentido horário um ângulo de:

$45° - \alpha_2 \cong 29{,}74°$

$\alpha_2 \cong 15{,}26°$ //

• para $m = 3$:

$2 \cdot 2{,}52 \cdot sen\,\theta_3 = 3 \cdot 1{,}25$

$sen\,\theta_3 = \frac{3{,}75}{5{,}04} \Rightarrow sen\,\theta_3 \cong 0{,}744$

$\theta_3 \cong 48{,}08°$

girando no sentido horário $45° - \alpha_3 \cong 48{,}08$

$\alpha_3 \cong 3{,}08°$ //

• para $m = 4$:

$2 \cdot 2{,}52 \cdot sen\,\theta_4 = 4 \cdot 1{,}25$

$sen\,\theta_4 = \frac{5{,}0}{5{,}04} \Rightarrow sen\,\theta_4 \cong 0{,}992$

$\theta_4 \cong 82{,}78°$

girando no sentido horário $45° + \alpha_4 = 29{,}74°$

$\alpha_4 \cong 37{,}8°$ //

9- na primeira placa temos $I_1 = I_0 \cos^2\theta$ para intensidade transmitida

na segunda placa, ortogonal ao plano de polarização:

$I_2 = I_1 \cos^2(90° - \theta)$

$I_2 = I_0 \cos^2\theta \cos^2(90° - \theta)$

só que: $\cos(90° - \theta) = \cos 90° \cos\theta + sen\,90° \, sen\,\theta$

$\cos(90° - \theta) = sen\,\theta$

Logo, $I_2 = I_0 \cos^2\theta \, \text{sen}^2\theta$

só que $\text{sen}\theta \cos\theta = \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}$, então $\text{sen}^2\theta \cos^2\theta = \frac{\text{sen}^2 2\theta}{4}$

$\therefore I_2 = I_0 \frac{\text{sen}^2 2\theta}{4}$

- os valores máximos correspondem aos valores de $2\theta = \frac{\pi}{2}(2n+1)$,

ou seja, $\theta = \frac{\pi}{4}(2n+1)$ sendo $n = 0, 1, 2, \ldots$

- os valores mínimos correspondem à $2\theta = \pi n$,

ou seja, $\theta = \frac{\pi n}{2}$ sendo $n = 0, 1, 2, \ldots$

10- O número de N corresponde à: $N = \frac{d}{\lambda}$

onde d é a espessura da placa e $\lambda = 5890\,\text{Å}$

Para se ter uma placa de um quarto de onda

$$N_2 - N_1 = \frac{d}{\lambda_2} - \frac{d}{\lambda_1}$$

$$\frac{1}{4} = d\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

Sabemos que na refração: $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

Logo $\frac{1}{4} = d\left(\frac{1}{\lambda/n_2} - \frac{1}{\lambda/n_1}\right) = \frac{d}{\lambda}(n_2 - n_1)$

$$d = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{n_2 - n_1}\right) = \frac{5890.10^{-10}}{4}\left(\frac{1}{1{,}6117 - 1{,}6049}\right)$$

$$d \cong 22.10^4.10^{-10} \Rightarrow d \cong 22.10^{-6}\,m$$

$$d \cong 0{,}022\,mm$$