Lista 4- Interferência

1- Consideremos duas fendas que possuem material transparente, uma com material de índice n_1 e outra com material de índice n_2, ambos com espessura x.

O intervalo de tempo Δt que a luz leva pra atravessar as fendas é:

$$\Delta t = \frac{x}{v} \quad \text{sendo } v = \frac{c}{n}$$

$$\text{Logo: } \Delta t = \frac{x\,n}{c} \qquad \Delta t_1 = \frac{x\,n_1}{c} \quad e \quad \Delta t_2 = \frac{x\,n_2}{c}$$

Então, a diferença entre os dois feixes será $\Delta t = \frac{x(n_2 - n_1)}{c}$

sendo $x(n_2 - n_1)$ é o caminho óptico.

Fora dos meios, sabe-se que a diferença no caminho é: $d \operatorname{sen}\theta$.

Logo, para este caso, a diferença total será:

$$x(n_2 - n_1) + d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$$

Neste caso, sabemos que um dos meios é o ar e possui índice 1 e o outro meio possui índice n.

$$\text{Logo, } \underbrace{x(n-1) + d \operatorname{sen}\theta = m\lambda}$$

2- Desejamos encontrar o campo resultante

$$E_R = E_1 + E_2$$

$$E_R = E_0 \operatorname{sen}(\omega t) + 5E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$E_R = E_0 \operatorname{sen}(\omega t) + 5E_0 [\operatorname{sen}(\omega t) \cdot \cos\phi + \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}\phi]$$

$$E_R = E_0 (1 + 5\cos\phi) \operatorname{sen}(\omega t) + 5E_0 \operatorname{sen}\phi \cos(\omega t)$$

queremos algo com a forma $E_R = E_m \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)$

$$E_R = E_m (\operatorname{sen}(\omega t) \cdot \cos\gamma + \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}\gamma)$$

Comparando as expressões:

$E_m \cos\gamma = E_0(1 + 5\cos\phi)$

e $E_m \operatorname{sen}\gamma = 5E_0 \operatorname{sen}\phi$

$E_m^2 \cos^2\gamma + E_m^2 \operatorname{sen}^2\gamma = E_0^2(1 + 5\cos\phi)^2 + 25E_0^2 \operatorname{sen}^2\phi$

$E_m^2 = E_0^2(1 + 10\cos\phi + 25\cos^2\phi) + 25E_0^2 \operatorname{sen}^2\phi$

$E_m^2 = E_0^2 + E_0^2 10\cos\phi + 25E_0^2(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi)$

$E_m^2 = 26E_0^2 + 10E_0^2\cos\phi$

$E_m = E_0(26 + 10\cos\phi)^{1/2}$

3- Sendo θ_m o ângulo para um máximo e $\theta_{m+1/2}$ o ângulo para o mínimo.

Medindo as diferenças

$d(\operatorname{sen}\theta_{m+1/2} - \operatorname{sen}\theta_m) = (m + 1/2)\lambda - m\lambda = \lambda/2$

considerando θ suficientemente pequeno para usa $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$d(\theta_{m+1/2} - \theta_m) = \lambda/2$

$$\theta_{m+1/2} - \theta_m = \frac{\lambda}{2d} = \Delta\theta$$

4- Sabendo que a amplitude de uma fenda é o dobro da outra. Podemos considerar a resultante E_R da soma das componentes:

$E_R = E_0 \operatorname{sen}(\omega t) + 2E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$E_R = E_0 \operatorname{sen}\omega t + 2E_0(\operatorname{sen}\omega t \cdot \cos\phi + \cos\omega t \operatorname{sen}\phi)$

$E_R = E_0(1 + 2\cos\phi)\operatorname{sen}\omega t + 2E_0 \operatorname{sen}\phi \cos\omega t$

Procuramos uma solução do tipo: $E_R = E_m \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)$

Assim, $E_R = E_m \operatorname{sen}\omega t \cos\gamma + E_m \operatorname{sen}\gamma \cos\omega t$

Comparando as expressões:

$E_m \cos\gamma = E_0(1 + 2\cos\phi)$ e $E_m \operatorname{sen}\gamma = 2E_0 \operatorname{sen}\phi$

Somando: $E_m^2(\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma) = E_0^2(1 + 2\cos\phi)^2 + 4E_0^2 \operatorname{sen}^2\phi$

$E_m^2 = E_0^2(1 + 4\cos\phi + 4\cos^2\phi) + 4E_0^2 \operatorname{sen}^2\phi$

$$E_m^2 = E_0^2 + 4E_0^2\cos\phi + 4E_0^2 = 5E_0^2 + 4E_0^2\cos\phi$$

A intensidade é proporcional ao quadrado do campo elétrico, logo: $I_\theta \propto E_\theta^2 \propto E_0^2(5 + 4\cos\phi)$

O ângulo ϕ representa a diferença de fase que os dois sinais possuem para produzir as franjas de interferência.

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(d \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Para $\theta = 0$, temos $\phi = 0$ e $I_\theta \propto E_0^2(5 + 4\cdot\cos 0)$
$\propto 9E_0^2 = I_m$

Podem reescrever I_θ como:

$$I_\theta = \frac{I_m}{9}\left[5 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\operatorname{sen}\theta\right)\right]$$

Lembrando que $\cos\phi = 2\cos^2\phi/2 - 1$

$$I_\theta = \frac{I_m}{9}\left[5 + 8\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d\operatorname{sen}\theta\right) - 4\right]$$

$$I_\theta = \frac{I_m}{9}\left[1 + 8\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d\operatorname{sen}\theta\right)\right]$$

5- Para as interferências máximas temos:

$$2dn = \left(m_{max} + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{com } m_{max} = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

E para as interferências mínimas temos:

$$2dn = m_{min}\lambda \quad \text{com } m_{min} = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo: $\left(m_{max} + \frac{1}{2}\right)\lambda_{max} = m_{min}\lambda_{min}$

Utilizando $\lambda_{max} = 6000\,Å$ e $\lambda_{min} = 4500\,Å$

$$(m_{max} + 1/2) \cdot 6000 = m_{min} \cdot 4500$$

$$(m_{max} + 1/2) \cdot 4 = m_{min} \cdot 3$$

$$4m_{max} + 2 = 3m_{min}$$ menores valores inteiros possíveis

Escolhendo $m_{max} = 1$ e $m_{min} = 2$, menores valores possíveis pra satisfazer a condição.

substituindo na equação de máximo

$$2\,d\,n = \left(m_{max} + \tfrac{1}{2}\right)\lambda$$

$$2\,d\,.1{,}33 = \left(1 + \tfrac{1}{2}\right).6000 = \tfrac{3}{2}.6000 = 9000$$

$$d = \frac{9000}{2{,}66} \Rightarrow d \cong 3384\,\mathring{A}$$

substituindo na de mínimo

$$2\,d\,n = m_{min}\,\lambda_{min}$$

$$2\,d.1{,}33 = 2.\,4500$$

$$d = \frac{9000}{2{,}66} \Rightarrow d \cong 3384\,\mathring{A}$$

6- Os raios dos anéis de Newton são dados por

$$r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda R}$$

Para $m = 10$: $r = \sqrt{\left(10 + \frac{1}{2}\right)\lambda R} = \sqrt{\frac{21}{2}\lambda R}$

no ar: $d = 1{,}5 \Rightarrow r = \frac{1{,}5}{2} = \sqrt{\frac{21}{2}\lambda R}$

Introduzindo líquido: $d = \frac{1{,}2}{2} = \sqrt{\frac{21}{2}\frac{\lambda}{n}R}$

Logo, $1{,}2\sqrt{n} = 1{,}5$

$$\sqrt{n} = \frac{1{,}5}{1{,}2} = 1{,}25 \Rightarrow n = (1{,}25)^2 = \underline{1{,}5625}$$

7- Sabendo que $r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda R}$

$$r_{m+1} - r_m = \sqrt{\left(m + \frac{3}{2}\right)\lambda R} - \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda R}$$

$$x_{m+1} - x_m = \sqrt{m\lambda R}\left[\left(1+\frac{3}{2m}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{1}{2m}\right)^{1/2}\right]$$

sabe-se que $(1+x)^n \cong 1 + \frac{nx}{1!}$ para $x \ll 1$

Logo $x_{m+1} - x_m \cong \sqrt{m\lambda R}\left[\cancel{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2m}\cdot\frac{1}{1!} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{1!}\right)\right]$

$$x_{m+1} - x_m \cong \sqrt{m\lambda R}\left(\frac{3}{4m} - \frac{1}{4m}\right) = \sqrt{m\lambda R}\left(\frac{2}{4m}\right) = \sqrt{m\lambda R}\,\frac{1}{2m}$$

$$x_{m+1} - x_m \cong \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda R}{m}}$$

8- sendo θ muito pequeno, podemos adotar $\text{sen}\,\theta \cong \theta$

Logo $\theta \cong \frac{t}{x}$

sabe-se que: $\frac{2t}{\lambda} = m$ com $m = 0, 1, 2, \ldots$

substituindo $t = x\theta$

$$\frac{2x\theta}{\lambda} = m$$

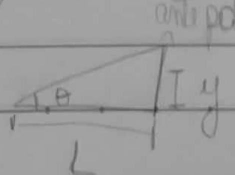
$$\frac{m}{x} = \frac{2\theta}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{500 \cdot 10^{-9}\,m\,(100\,cm/m)} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-5}\,cm} = 12\,cm^{-1}$$

Logo, observamos 12 franjas escuras por centímetro

9- sabe-se que $d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$ com $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{d} = m\,\frac{5 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^{-3}\,m$$

Sendo θ pequeno, podemos considerar $\text{sen}\,\theta \cong \theta \cong \text{tg}\,\theta$



Então, $y = L\,\text{tg}\,\theta \cong L\theta$

A posição do m-ésimo será

$y_m = L\theta_m = 1,4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\, m = 7 \cdot 10^{-3}\, m$

ou seja, cada máximo principal está separado por 7 mm sobre o anteparo.

10- $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{m\lambda}{d}$

- Primeiro calculamos para $\lambda_1 = 589\, nm = 589 \cdot 10^{-9}\, m$

$d = \dfrac{1}{10^4 \text{ linhas/cm}} \Rightarrow d = 10^{-4}\, cm = 10^{-6}\, m$

$\operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{589 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}} = 0,589$

$\theta_1 = 36,09^\circ$

- Para $\lambda_2 = 589,59\, n$

$\operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{589,5 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}} = 0,58959$

$\theta_2 = 36,13^\circ$