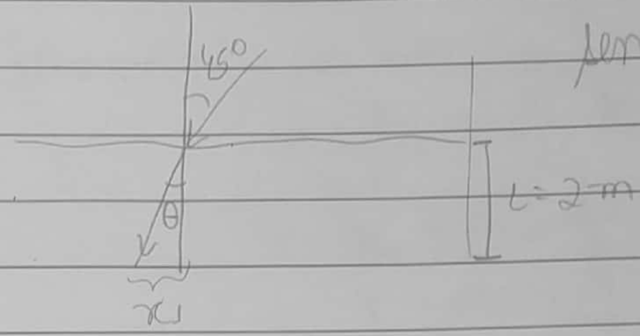
Lista 3 - Imagens

1- Considerando, primeiramente, a parte da estaca submersa e usando Lei de Snell:

$$n_{ar} \, sen\, 45° = n_{água} \, sen\, \theta$$

$$1 \cdot \sqrt{2}/2 = 1{,}33 \cdot sen\,\theta$$

$$sen\,\theta \approx 0{,}532$$



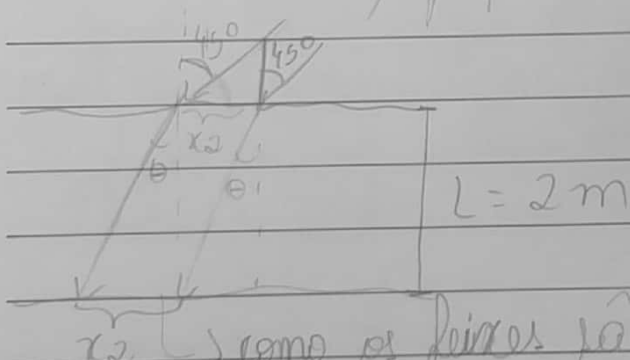
$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$cos\,\theta = \sqrt{1-(0{,}532)^2}$$

$$cos\,\theta \approx 0{,}847$$

$$x_1 = L \cdot tg\,\theta = 2 \cdot \frac{0{,}532}{0{,}847} \Rightarrow x_1 = 1{,}256\, m$$

Agora vamos considerar a parte da estaca acima da superfície da água (0,5 m).



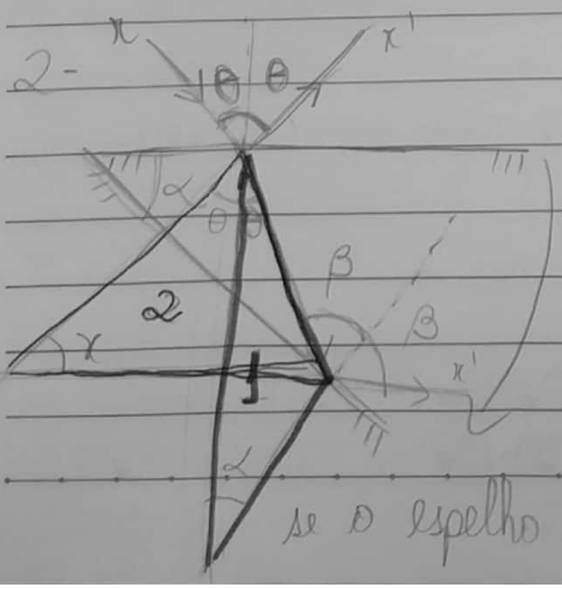
$$x_2 = tg\,45° \cdot 0{,}5$$

$$x_2 = 0{,}5\, m$$

→ como os feixes são paralelos

$$x = x_1 + x_2 = 1{,}256 + 0{,}5 = 1{,}756\, m$$

2-



O ângulo entre os feixes x?

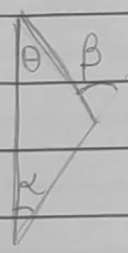
girando o espelhando com um ângulo α

se o espelho gira α, a normal do espelho também gira α

Scanned by CamScanner

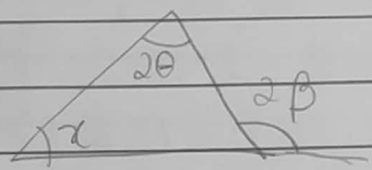
__:__:__

Considerando o triângulo 1:



$$180° - \beta = 180° - \theta - \alpha$$
$$\beta = \theta + \alpha$$
$$\alpha = \beta - \theta$$

Considerando o triângulo 2:



$$180° - 2\beta = 180° - 2\theta - x$$
$$2\beta = 2\theta + x$$
$$x = 2\beta - 2\theta$$
$$x = 2(\beta - \theta)$$
$$x = 2\alpha$$ //

3- Para a primeira refração, aplicamos lei de Snell:

$$\text{sen}\,\theta_1 = n_p \cdot \text{sen}\,\theta_P$$
$$\text{sen}\,\theta_P = \frac{\text{sen}\,\theta_1}{n_p}$$

Sendo n_p o índice de refração no prisma e θ_P o ângulo de refração no ponto P

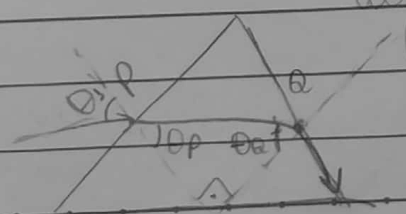
Na segunda refração, aplicamos novamente lei de Snell:

$$n_p \cdot \text{sen}\,\theta_Q = \text{sen}\,90°$$

Sendo θ_Q o ângulo de incidência em Q.

$$\text{sen}\,90° = 1$$

Logo $\text{sen}\,\theta_Q = \frac{1}{n_p}$



$$180 = 90 + \theta_P + \theta_Q$$
$$\theta_Q = 90 - \theta_P$$

Logo $sen\,\theta_a = \cos\theta_P$

como $sen\,\theta_a = \frac{1}{n_P}$ logo $\cos\theta_P = \frac{1}{n_P}$

e $sen\,\theta_P = \frac{sen\,\theta_1}{n_P}$

Logo, como $\cos^2\theta_P + sen^2\theta_P = 1$

$$\frac{sen^2\theta_1}{n_P^2} + \frac{1}{n_P^2} = 1$$

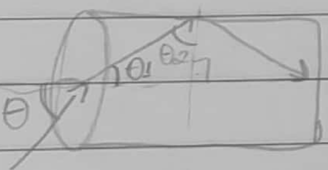
$$sen^2\theta_1 + 1 = n_P^2$$

$$n_P = \sqrt{sen^2\theta_1 + 1}$$

4- Primeiramente usaremos lei de Snell para o feixe que incide na fibra.

$$sen\,\theta = n_1 \cdot sen\,\theta_1$$

sendo θ_1 o ângulo de refração dentro do núcleo de vidro



Pela figura $180° = \theta_1 + \theta_2 + 90°$

Logo $\theta_1 = 90° - \theta_2$

$\therefore\; sen\,\theta_1 = \cos\theta_2$

Quando o feixe incide na película:

$$n_1\, sen\,\theta_2 = sen\,\theta_P\; n_2$$

sendo θ_P o ângulo de refração na película.

Considerando o maior ângulo para o feixe não sair do núcleo, ou seja, $90°$, $sen\,\theta_P = 1$.

Logo, para esse limite:

$$sen\,\theta_2 = \frac{n_2}{n_1}$$

Considerando $sen^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1$

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} + \cos^2\theta_2 = 1 \Rightarrow \cos^2\theta_2 = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}$$

Porém, $\cos\theta_2 = \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{n_1}$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1} \cdot n_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

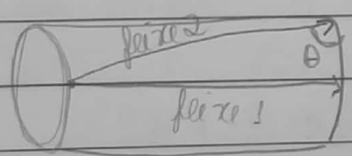
$$\boxed{\theta = \operatorname{arc\,sen}(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}} \quad //$$

5- O feixe que percorre ao longo do eixo percorrerá

$v = \frac{L}{\Delta t_1}$ só que $v = \frac{c}{n_1}$

$$\Delta t_1 = \frac{L\, n_1}{c}$$

O feixe que é refletido no ângulo crítico:



$v = \frac{\Delta S}{\Delta t_2}$ $\Delta S = \frac{L}{\operatorname{sen}\theta}$

$$\Delta t_2 = \frac{L}{c \operatorname{sen}\theta}\, n_1$$

Mas $\operatorname{sen}\theta = \frac{n_2}{n_1}$, como visto no exercício anterior.

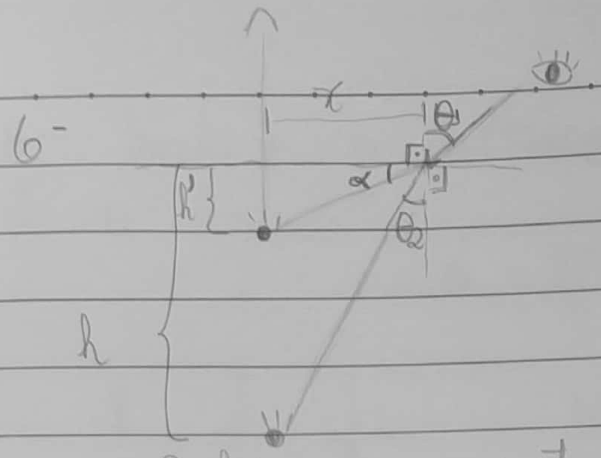
$$\therefore \Delta t_2 = \frac{L}{c\, n_2/n_1}\, n_1 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L\, n_1^2}{c\, n_2}$$

Então, a diferença entre os trajetos:

$$\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{L\, n_1^2}{c\, n_2} - \frac{L\, n_1}{c}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{L\, n_1 (n_1 - n_2)}{c\, n_2}} \quad //$$

6-



O feixe que parte do observador e incide na água com ângulo θ_1 sofre refração, por lei de Snell.

$$\operatorname{sen}\theta_1 = n.\operatorname{sen}\theta_2$$

Pela figura, $tg\,\alpha = \dfrac{h'}{x}$ e $\theta_1 + \alpha = 90°$ ↳ logo $cotg\,\theta_1 = tg\,\alpha$

$\therefore\ cotg\,\theta_1 = \dfrac{h'}{x} \Rightarrow tg\,\theta_1 = \dfrac{x}{h'} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_1} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{\cos\theta_1 x}{h'}$

Para o raio refratado, o ângulo de refração θ_2:

$$tg\,\theta_2 = \frac{x}{h} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\cos\theta_2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{x\cos\theta_2}{h}$$

mas, $\operatorname{sen}\theta_1 = n\operatorname{sen}\theta_2$

substituindo: $\dfrac{\cos\theta_1 x}{h'} = n.\dfrac{\cos\theta_2 x}{h}$

Considerando $\operatorname{sen}^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1$ e sabendo que $\operatorname{sen}\theta_1 = n\operatorname{sen}\theta_2$ e $\cos\theta_1 = n\cos\theta_2 \dfrac{h'}{h}$:

Então: $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{n^2} + \dfrac{\cos^2\theta_1 h^2}{n^2 h'^2} = 1$

Agora considerando $\operatorname{sen}^2\theta_1 + \cos^2\theta_1 = 1 \Rightarrow \cos^2\theta_1 = 1 - \operatorname{sen}^2\theta_1$

Substituindo na equação anterior:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{n^2} + \frac{(1 - \operatorname{sen}^2\theta_1)h^2}{n^2 h'^2} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\theta_1 h'^2 + h^2 - \operatorname{sen}^2\theta_1 h^2 = n^2 h'^2$$

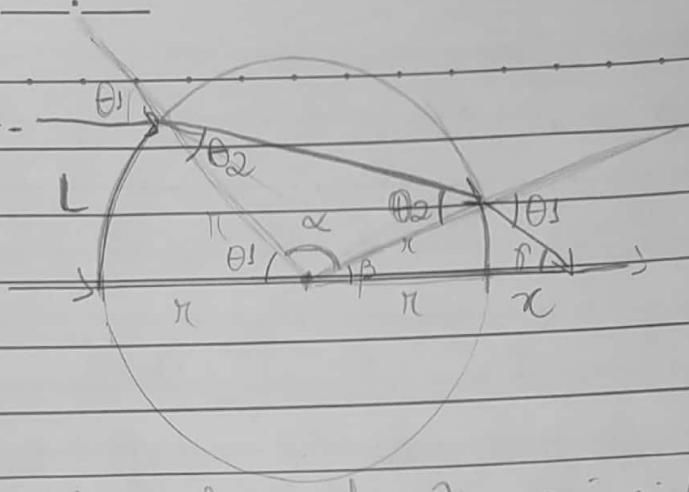
$$h'^2(\operatorname{sen}^2\theta_1 - n^2) = h^2(\operatorname{sen}^2\theta_1 - 1)$$

$$h' = h\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta_1}{n^2 - \operatorname{sen}^2\theta_1}}$$ //

FORONI

Scanned by CamScanner

7-



Ao sofrer refração ao incidir na esfera

$$\sin\theta_1 = n \sin\theta_2$$

considerando os ângulos pequenos: $\theta_1 = n\theta_2$

Pela figura: $\alpha + 2\theta_2 = 180^\circ$ e $\theta_1 + \alpha + \beta = 180^\circ$

Sabemos também que: $\theta_1 = \frac{L}{r}$ e $\beta = \frac{l}{r}$

Substituindo as expressões:

$$2\theta_2 = \theta_1 + \beta \Rightarrow \frac{2}{n}\theta_1 = \theta_1 + \beta \Rightarrow \frac{2}{n}\frac{L}{r} = \frac{L}{r} + \frac{l}{r}$$

$$l = L\left(\frac{2}{n} - 1\right)$$

Pela figura, também verificamos que:

$$180 - (\beta + \gamma) = 180 - \theta_1$$

$$\theta_1 = \beta + \gamma \quad \text{e} \quad \gamma \approx l/x$$

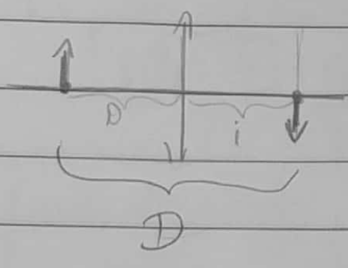
Então: $\frac{L}{r} \approx \frac{l}{r} + \frac{l}{x}$

Mas, se $r >> x$: $\frac{L}{r} \approx \frac{l}{x} \Rightarrow l \approx \frac{Lx}{r}$

$$\frac{Lx}{r} = L\left(\frac{2-n}{n}\right) \Rightarrow x = \frac{(2-n)r}{n}$$

8- Sendo i a distância da imagem e o do objeto até a lente

$$i + o = D \Rightarrow o = (D - i)$$



sabemos que $\frac{1}{i} + \frac{1}{o} = \frac{1}{f}$

Logo $\frac{1}{(D-i)} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$

$$\frac{i + D - i}{Di - i^2} = \frac{1}{f} \Rightarrow Df = Di - i^2$$

$$i^2 - iD + Df = 0$$

resolvendo a equação: $i = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$

Logo, a distância d entre as duas posições possíveis.

$$d = i_1 - i_2$$

$$i_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \quad e \quad i_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$$

$$d = \frac{\sqrt{D^2 - 4Df}}{2} + \frac{\sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \Rightarrow d = \sqrt{D^2 - 4Df}$$

9- Seja h' a altura da imagem e h a altura do objeto e sabendo que $h' = -\frac{i}{o} h$

Para a primeira possibilidade

$i_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$ substituindo em $i + o = D$

$$o_1 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$$

Então: $h_1' = \frac{-i_1}{o_1} \cdot h = -\frac{(D + \sqrt{D^2 - 4Df})}{2} \cdot \frac{2}{D - \sqrt{D^2 - 4Df}} \cdot h$

$$h_1' = -\left(\frac{D + d}{D - d}\right) \cdot h$$

Scanned by CamScanner

Para a segunda possibilidade:

$$i_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \qquad o_2 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$$

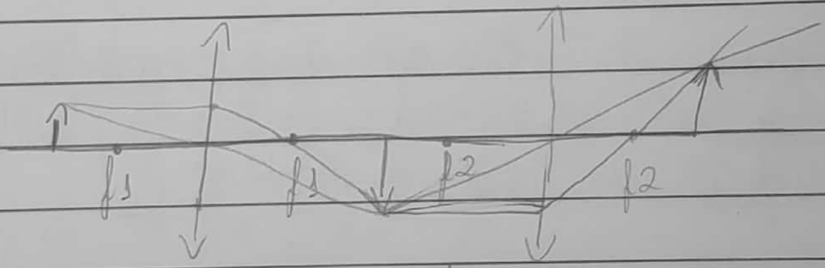
Então, $h_2' = -\frac{i_2}{o_2} h = -\frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} \cdot \frac{2}{D + \sqrt{D^2 - 4Df}} \cdot h$

$$h_2' = -\left(\frac{D - d}{D + d}\right)$$

$$\therefore \frac{h_1'}{h_2'} = +\left(\frac{D + d}{D - d}\right) \cdot \cancel{h} \cdot \left(\frac{D + d}{D - d}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{h}}$$

$$= \left(\frac{D + d}{D - d}\right)^2$$

10-



Para a primeira lente:

$$\frac{1}{i_1} + \frac{1}{o_1} = \frac{1}{f_1}$$

E para a segunda lente:

$$\frac{1}{i_2} + \frac{1}{o_2} = \frac{1}{f_2}$$

Porém, o objeto visto pela segunda lente é a imagem formada pela primeira lente:

Logo, $o_2 = x - i_1$

$$\frac{1}{x - i_1} + \frac{1}{o_2} = \frac{1}{f_2}$$

Somando as duas expressões:

$$\frac{1}{i_1} + \frac{1}{o_1} + \frac{1}{x - i_1} + \frac{1}{o_2} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1}$$

Scanned by CamScanner

Se considerarmos o caso $p_1 \to \infty \Rightarrow i_1 = f_1$ e $i_2 = F$
onde F é a distância focal da lente equivalente.

Então: $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{x - f_1} + \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_2} - \left(\frac{1}{x - f_1}\right)$$

Considerando, agora, $i_2 \to \infty \Rightarrow x - i_1 = f_2$ e $p_1 = F$

Então: $\frac{1}{x - f_2} + \frac{1}{F} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} - \left(\frac{1}{x - f_2}\right)$$

Fazendo a média das duas situações:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \left(\frac{1}{x - f_1} + \frac{1}{x - f_2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \left(\frac{x - f_2 + x - f_1}{(x - f_1)(x - f_2)}\right)\right]$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{f_1 + f_2 - 2x}{(x - f_1)(x - f_2)}\right]$$

Considerando que $x < f_1$ e $x < f_2$

$$\frac{1}{F} \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{2x}{f_1 . f_2} + \frac{f_1}{f_1 f_2} + \frac{f_2}{f_1 f_2}\right]$$

$$\frac{1}{F} \simeq \frac{1}{2}\left[2\frac{1}{f_1} + 2\frac{1}{f_2} - \frac{2x}{f_1 f_2}\right]$$

$$\frac{1}{F} \simeq \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{x}{f_1 f_2}$$

E se $x \simeq 0$, logo: $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

Scanned by CamScanner