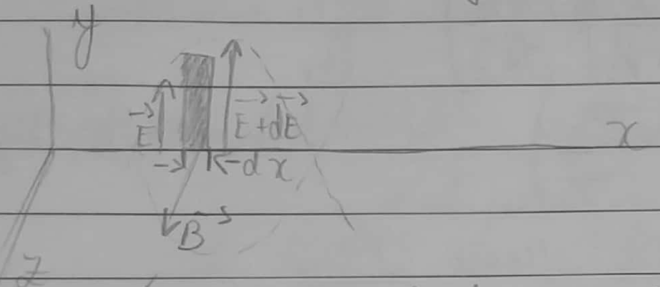
Lista 1 - Equações de Maxwell

1- Sabemos que as funções de ondas harmônicas obedecem a uma equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (*)$$

onde v é a velocidade de propagação da onda.

Pela lei de Faraday: $\int E \cdot dl = -\frac{d}{dt}\int B \cdot dA$



É preciso calcular a integral de linha de $\vec{E}$, em torno da espira no sentido anti-horário. Como $\vec{E}$ e $d\vec{l}$ são perpendiculares na parte de cima e de baixo da espira, nestas situações:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_y + dE_y)\, h - E_y h = dE_y h$$

Quanto ao fluxo magnético:

$$\int B\, dA = B_z\, dx\, h$$

Logo $\frac{d}{dt}\int B \cdot dA = dx\, h \frac{dB_z}{dt}$

Então, pela lei de Faraday, temos:

$$dE_y \cdot h = -h\, dx \frac{dB_z}{dt}$$

$$\frac{dE_y}{dx} = -\frac{dB_z}{dt} \quad (1)$$

Esta equação nos mostra que se houver um campo elétrico $\vec{E}$ que depende de x, deve haver uma componente do campo magnético B_z que depende do tempo.

Pela lei de ampère: $\oint B \cdot dl = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int E \cdot dA$

em casos que não existam correntes refazendo os cálculos semelhantes ao anterior, temos:

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2)$$

Derivando à equação (1) em relação a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \rightarrow \text{comparando com eq. (2)}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = +\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

comparando com equação da onda (*) com velocidade c: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

2- Temos que calcular a integral de linha $\oint B.\,dl$ da curva circular de raio $r = 2{,}0\,cm$:

$$\oint B.\,dl = B(2\pi r)$$

O fluxo elétrico dentro da área é:

$$\Phi_E = \pi r^2 E = \pi r^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \pi r^2 \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{r^2 Q}{R^2 \epsilon_0}$$

Calculando a corrente deslocamento:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\oint B.\,dl = \mu_0 (\underbrace{I + I_d}_{\text{neste caso existe apenas corrente deslocamento}}) = \mu_0 I_d = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$B.(2\pi r) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} \frac{dQ}{dt} = (2 \times 10^{-7}\,T.m/A) . \frac{0{,}02\,m}{(0{,}03\,m)^2} . (2{,}5\,A)$$

$$\boxed{B = 1{,}11 \times 10^{-5}\,T}$$

3- A corrente máxima é igual a corrente de deslocamento.

Pela Lei de Ampere-Maxwell:

$$\oint \vec{B}.\,d\vec{l} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad \text{sendo } \Phi_E = \int \vec{E}.\,d\vec{A}$$

A corrente deslocamento $i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ e $E = \frac{V}{d}$

Logo $i_d = \frac{\epsilon_0 A}{d} . \frac{dV}{dt}$ 　　 $V = \mathcal{E} = \mathcal{E}_m \,sen(\omega t)$ e $\frac{\epsilon_0 A}{d} = C$

$$i_d = C . \mathcal{E}_m \omega . \cos \omega t$$

$$i_{d,max} = C . \mathcal{E}_m \omega . \quad \left(\text{será máxima quando } \cos \omega t = 1 \right)$$

FORONI

$$C = \frac{i_{d,max}}{E_m \cdot \omega} = \frac{4,5 \cdot 10^{-5}}{400 \cdot 150} = 7,5 \cdot 10^{-10}\ F$$

Porém, $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$d = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{C} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2}{7,5 \cdot 10^{-10}} = 2,36\ mm$$

4- Devemos considerar que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt}$$

Para obter B máximo, consideramos dE/dt máximo.

$$B_{max} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \cdot \frac{1}{A} \left. \frac{d\Phi_E}{dt} \right|_{max}$$

Como $i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow i_{d\,max} = \epsilon_0 \left. \frac{d\Phi_E}{dt} \right|_{max}$

$$\left. \frac{d\Phi_E}{dt} \right|_{max} = \frac{i_{d\,max}}{\epsilon_0} \cong 5,1 \cdot 10^6\ V \cdot m \cdot s^{-1}$$

Logo $B_{max} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{2} \cdot \frac{0,1}{0,2} \cdot 5,1 \cdot 10^6$

$$B_{max} = 1,42 \cdot 10^{-11}\ T$$

Lista 1 - Equações de Maxwell

5- A variação da carga em uma das faces:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\int dq = \int i\, dt$$

$$q = \int_0^t \alpha t\, dt = \alpha \int_0^t t\, dt = \alpha \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^t$$

$$q = \frac{\alpha t^2}{2}$$

6- Para calcular $\vec{E}$, consideremos a Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot \pi a^2 = \frac{\alpha t^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\alpha t^2}{2\pi \epsilon_0 a^2}$$

Para calcular $\vec{B}$, consideremos a Lei de Ampere:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \text{mas } \Phi_E = \pi r^2 . E$$

$$B . 2\cancel{\pi r} = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t^2}{2\pi \epsilon_0 a^2}\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 \cancel{\epsilon_0} r}{2} \cdot \frac{\cancel{2} \alpha t}{\cancel{2} \pi \cancel{\epsilon_0} a^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 \alpha t r}{2\pi a^2}$$

7- Neste caso o fluxo total do campo de indução magnético em uma determinada superfície fechada não seria nula, como na lei de Gauss.

Neste caso: $\oint \vec{B}\, d\vec{A} = \mu_0 Q_m$

E poderíamos dizer que uma corrente de carga magnética conduz um campo elétrico.

E teríamos uma lei de Faraday corrigida, para esse caso: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} + \mu_0 \frac{dQ_m}{dt}$

8- Pela lei de Ohm: $V = R I$ e $V = E \cdot d$

$V = E \cdot L$

Logo $E d = R \cdot I$

$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{\rho \cdot l}{\pi a^2}$

$E \cdot L = \frac{\rho \cdot L \cdot I}{\pi a^2}$

$E = \frac{\rho \cdot I}{\pi a^2}$ //

9- Pela Lei de Ampère:

$\oint B\, dl = \mu_0 I$

$B \cdot 2\pi a = \mu_0 I$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ //

$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

mas $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares, logo:

$S = \frac{E \cdot B}{\mu_0} = \frac{\rho \cdot I}{\pi a^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi a \mu_0}$;

$S = \frac{\rho \cdot I^2}{2\pi^2 a^3}$

10- Lei de Biot-Savart:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(x') \times \hat{n}}{n^2} \, dl'$$

$n^2 = R^2 + a^2$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{I}{(R^2 + x^2)} \, dx \, \text{sen}\,\theta$$

$I \times \hat{n} = I . \text{sen}\,\theta$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\text{Logo } B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \, dx$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi R^3} \int_{-a}^{a} \frac{1}{(1 + x^2/R^2)^{3/2}} \, dx$$

substituindo $\frac{x}{R} = tg\,\theta$ $\qquad \frac{dx}{R} = \sec^2\theta \, d\theta$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int \frac{R \sec^2\theta}{\sec^3\theta} \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int \cos\theta \, d\theta$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{sen}\,\theta$$

$$\text{mas } \text{sen}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\text{Logo } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \Bigg|_{-a}^{a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{2a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}$$

FORONI