MECÂNICA DOS FLUIDOS: NOÇÕES, LABORATÓRIO E APLICAÇÕES
(PME 3332)
Gabarito Segunda Prova - 2018

1. (3 pontos) Uma estufa é usada para gerar energia elétrica através do calor do sol. Ar externo de massa específica ρ_a entra na estufa, sendo aquecido e assumindo uma massa específica ρ_c tal que $\rho_c < \rho_a$. Como resultado da diferença de massas específicas o ar aquecido sobe por uma chaminé vertical de diâmetro D com vazão Q movendo uma turbina de eficiência η. A altura h da chaminé é muito maior que a altura da estufa, e o diâmetro D da chaminé é muito menor que o diâmetro da estufa. A única perda de carga singular ocorre na entrada da chaminé e é caracterizada por um coeficiente de perda de carga singular (baseado na energia cinética do ar na chaminé) k_s. A chaminé tem um coeficiente de perda de carga distribuída f. Considere a pressão no interior da estufa como sendo a pressão atmosférica ao nível do solo p_a e a pressão atmosférica no alto da chaminé como sendo $p_a - \rho_a g h$. Obtenha uma expressão para a potência no eixo da turbina $\dot{W}_{eixo}$ como função de ρ_a, ρ_c, Q, D, f, k_s, g, h e η.

Dados: $H_{turbina} = \left(\dfrac{V_1^2}{2g} + \dfrac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\dfrac{V_2^2}{2g} + \dfrac{p_2}{\rho g} + z_2\right) - H_{perdas}$ $\qquad h_s = k_s \dfrac{V^2}{2g}$ $\qquad h_f = f \dfrac{L}{D}\dfrac{V^2}{2g}$

$\dot{W}_{eixo} = \eta \, \rho g Q H_{turbina}$; $V = Q/A$

2. (4 pontos) Um cilindro equipado com um pistão de área A_p e cheio de água de massa específica ρ está montado sobre um carro como mostrado na figura. Um homem de pé sobre o carro exerce uma força F no pistão, empurrando-o com velocidade V_p e ejetando um jato de água de velocidade V_j na atmosfera através do bocal, cuja saída tem área A_j. Uma corda impede o carro de entrar em movimento. Obtenha expressões para a velocidade V_j do jato e para a tensão T na corda em função de ρ, F, A_j e A_p. Despreze efeitos gravitacionais e atrito no pistão.

Dados: $\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} = \text{const}$ (desprezando gravidade e atrito)

$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \dfrac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho \vec{V}\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\left(\vec{V}_r \cdot \vec{n}\right) dS$ $\qquad$ ou $\qquad$ $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \int_{\forall C} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho \vec{V}\right) d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) dS$

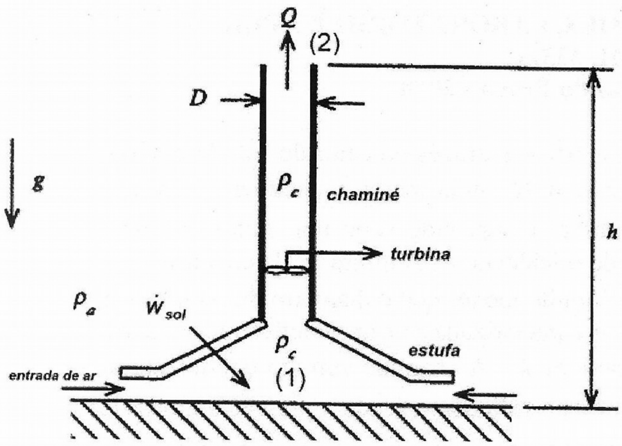
3. (3 pontos) Como é bem conhecido pelos jogadores de futebol, beisebol e golfe, uma bola viajando no ar tende a curvar a trajetória da sua direção primária se estiver girando. Considerar uma esfera de diâmetro D viajando com uma velocidade V através de um fluido incompressível de massa específica ρ e viscosidade μ. A esfera está girando com velocidade angular Ω. Estamos interessados na força F exercida na esfera na direção perpendicular ao seu movimento e ao seu eixo de rotação. Conhecemos um estudo experimental que mostra que, para números de Reynolds elevados, a força F resulta independente da viscosidade μ. Além disto, medições em uma esfera de diâmetro D_m viajando em um fluido de massa específica ρ_m com uma velocidade V_m mostram que a força F_m é proporcional a Ω_m, com a relação:

$$F_m = A_m \, \Omega_m$$

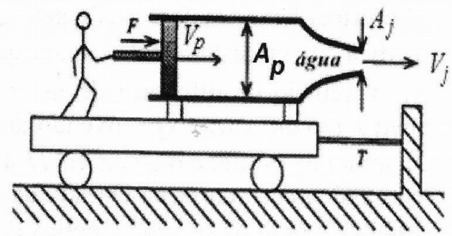
onde A_m é uma constante de proporcionalidade dimensional.

a) Definir um conjunto de parâmetros adimensionais dos quais depende o fenômeno.
b) Calcular a relação funcional em um protótipo da força F_p em função da velocidade angular Ω_p para uma esfera de diâmetro D_p viajando em um fluido de massa específica ρ_p com uma velocidade V_p.

Onde corresponda, expressar os resultados em função dos fatores de escala $k_\varphi = \dfrac{\varphi_m}{\varphi_p}$.



problema 1



problema 2

IMPORTANTE:

- Escrever de maneira legível.
- Anteceder as expressões matemáticas com um raciocínio ou com uma explicação do que vai ser feito. NÃO SERÃO ACEITAS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS SEM UM RACIOCÍNIO!

Gabarito

1. A equação da energia é:

$$H_{turbina} = \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) - H_{perdas}$$

Considerando o ponto (1) no interior da estufa ($V \cong 0$ pois a estufa tem um diâmetro grande quando comparada com a chaminé) e o ponto (2) na saída da chaminé:

$$H_{turbina} = \left(0 + \frac{p_a}{\rho_c g} + 0\right) - \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p_a - \rho_a g h}{\rho_c g} + h\right) - \left(k_s + f\frac{h}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$

Isso resulta:

$$H_{turbina} = \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_c} h - \left(1 + k_s + f\frac{h}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$

Como temos que a potência é :

$$\dot{W}_{eixo} = \eta \; \rho_c \, g \, Q \, H_{turbina}$$

E a velocidade é :

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

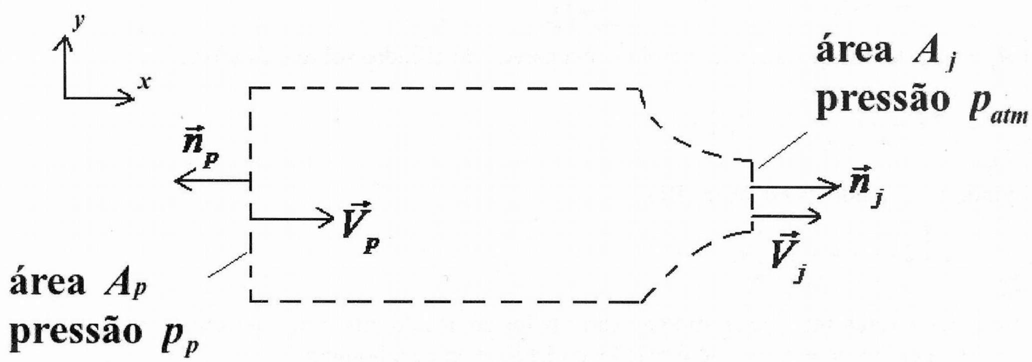
Temos então:

$$\frac{\dot{W}_{eixo}}{\eta \rho_c g Q} = \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_c} h - \left(1 + k_s + f\frac{h}{D}\right)\frac{16 Q^2}{2 g \pi^2 D^4}$$

Que resulta:

$$\boxed{\dot{W}_{eixo} = \eta \, g \, Q\left[(\rho_a - \rho_c)h - \left(1 + k_s + f\frac{h}{D}\right)\frac{8 \rho_c Q^2}{g \pi^2 D^4}\right]}$$

2. Usando um volume de controle fixo cuja superfície de controle passa pela seção logo à jusante do pistão e pela abertura do bocal por onde sai o jato:



A equação da energia resulta:

$$\frac{V_p^2}{2} + \frac{p_p}{\rho} = \frac{V_j^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\rho} \quad \text{(I)}$$

Da continuidade:

$$V_j A_j = V_p A_p \quad \text{(II)}$$

Por outro lado, se trabalhamos com pressões efetivas ($p_{atm} = 0$) e não há atrito no pistão, como este se move com velocidade constante, a pressão p_p é dada por:

$$p_p = \frac{F}{A_p} \quad \text{(III)}$$

De (II) e (III) em (I):

$$\frac{V_j^2}{2} = \frac{(A_j/A_p)^2 V_j^2}{2} + \frac{F}{\rho A_p}$$

Que resulta:

$$\boxed{V_j = \left[\frac{2F}{\rho A_p\left(1 - A_j^2/A_p^2\right)}\right]^{1/2}} \quad \text{(IV)}$$

Aplicando a equação da quantidade de movimento ao mesmo volume de controle:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{V}\, d\forall}_{0} + \int_{A_p} \rho \underbrace{\vec{V}}_{V_p \vec{e}_x} \underbrace{(\vec{V}\cdot\vec{n})}_{-V_p} dS + \int_{A_j} \rho \underbrace{\vec{V}}_{V_j \vec{e}_x} \underbrace{(\vec{V}\cdot\vec{n})}_{+V_j} dS$$

Assim:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \rho\left(V_j^2 A_j - V_p^2 A_p\right)\vec{e}_x$$

Aplicando nesta última equação o resultado da equação (II):

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \rho V_j^2 A_j \left(1 - A_j / A_p\right)\vec{e}_x$$

Substituindo agora o resultado da equação (IV):

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \rho \frac{2F}{\rho A_p \left(1 + A_j / A_p\right)\left(1 - A_j / A_p\right)} A_j \left(1 - A_j / A_p\right)\vec{e}_x$$

Isso resulta:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = 2F \frac{A_j}{A_j + A_p}\vec{e}_x$$

Finalmente, na ausência de forças gravitacionais e usando pressões efetivas, as forças externas são dadas pela soma da força de contato exercida sobre o fluido pela parede do cilindro com a força de pressão na área A_p:

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = 2F \frac{A_j}{A_j + A_p}\vec{e}_x = -p_p A_p \vec{n}_p + \vec{F}_{\substack{\text{parede}\\ \text{do cilindro}\\ \text{sobre o fluido}}}$$

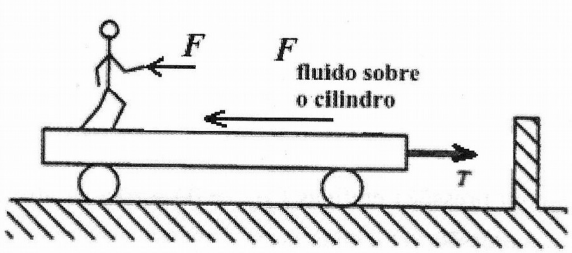
Como $\vec{n}_p = -\vec{e}_x$, temos que a força exercida pela parede do cilindro sobre o fluido é:

$$\vec{F}_{\substack{\text{parede}\\ \text{do cilindro}\\ \text{sobre o fluido}}} = \left(2F \frac{A_j}{A_j + A_p} - p_p A_p\right)\vec{e}_x$$

Substituindo o resultado da equação (III):

$$\vec{F}_{\substack{\text{parede}\\ \text{do cilindro}\\ \text{sobre o fluido}}} = F\left(2\frac{A_j}{A_j + A_p} - 1\right)\vec{e}_x$$

O negativo dessa força será transmitido ao carro pelos apoios do cilindro, e se somará à tração na corda e à força F que, pelo princípio da ação e reação, o pistão exerce no homem:



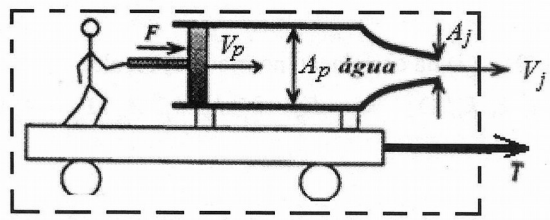
Assim:

$$T - F - F\left(2\frac{A_j}{A_j + A_p} - 1\right) = 0$$

Resultando:

$$\boxed{T = F\frac{2A_j}{A_j + A_p}}$$

Outra forma de chegar nesse resultado consiste em usar um volume de controle que engloba todo o cilindro e cuja superfície de controle passa através da corda:



Nesse caso agora, a única força externa é a tensão da corda, e não temos outras forças de contato na superfície de contorno. O único fluxo de quantidade de movimento (momento linear) atravessando a superfície de controle é o do jato, mas temos que levar em conta o termo transiente de variação do momento linear do volume de controle devido ao esvaziamento do cilindro. Uma massa por unidade de tempo $\rho V_p A_p$ deixa o volume de controle carregando uma velocidade $V_p \vec{e}_x$. Assim:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{\text{externas}}}_{T\vec{e}_x} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\forall C} \rho \vec{V}\, d\forall}_{-\rho V_p^2 A_p \vec{e}_x} + \underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V}\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right) dS}_{\rho V_j^2 A_j \vec{e}_x}$$

Isso resulta:

$$T = \rho V_j^2 A_j - \rho V_p^2 A_p$$

Substituindo (II):

$$T = \rho V_j^2 A_j - \rho\left(\frac{V_j A_j}{A_p}\right)^2 A_p = \rho V_j^2 A_j \frac{A_p - A_j}{A_p}$$

Substituindo o resultado da equação (IV):

$$T = \rho \frac{2F A_p}{\left(A_p + A_j\right)\left(A_p - A_j\right)} A_j \frac{A_p - A_j}{A_p}$$

Que, finalmente, resulta:

$$\boxed{T = F\frac{2A_j}{A_j + A_p}}$$

3.

a) Uma relação entre parâmetros adimensionais pode ser $\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\Omega D}{V}\right)$. Como o problema é independente da viscosidade, resulta independente do número de Reynolds, isto é:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = g\left(\frac{\Omega D}{V}\right) \qquad (1)$$

b) Da igualdade do número de Strouhal:

$$\frac{\Omega_m D_m}{V_m} = \frac{\Omega_p D_p}{V_p} \quad \Rightarrow \quad k_\Omega = \frac{\Omega_m}{\Omega_p} = k_V\, k_D^{-1} \qquad (2)$$

onde $k_V = \dfrac{V_m}{V_p}$ e $k_D = \dfrac{D_m}{D_p}$.

Da igualdade da força adimensional, resulta:

$$\frac{F_m}{\rho_m V_m^2 D_m^2} = \frac{F_p}{\rho_p V_p^2 D_p^2} \quad \Rightarrow \quad k_F = \frac{F_m}{F_p} = k_\rho \, k_V^2 \, k_D^2 \tag{3}$$

onde $k_\rho = \dfrac{\rho_m}{\rho_p}$.

Substituindo Ω_m e F_m de (2) e (3) na correlação no modelo, resulta:

$$k_\rho \, k_V^2 \, k_D^2 F_p = A_m \, k_V \, k_D^{-1} \, \Omega_p \quad \Rightarrow \quad F_p = k_\rho^{-1} \, k_V^{-1} \, k_D^{-3} \, A_m \, \Omega_p = A_p \, \Omega_p \tag{4}$$

onde $A_p = k_\rho^{-1} \, k_V^{-1} \, k_D^{-3} \, A_m$.