A partir da função de produção, e dos preços dos insumos, encontre:

a) A demanda dos insumos condicionada à quantidade produzida: $x^* = f(y)$
b) A função custo total: $C(y) = w_1x_1^*(y) + w_2x_2^*(y)$
c) A função custo médio: $CMe = C(y)/y$
d) A função custo marginal: $CMg = dC/dy$
e) A curva de oferta da firma: $y = f(p)$

1. **Longo prazo** (todos os fatores e ou insumos são variáveis); **rendimentos decrescentes de escala.**
   Função de produção: $y = x_1^{0,25} x_2^{0,25}$
   Preços: $w_1 = 1$; $w_2 = 2$

O produtor escolhe as quantidades dos insumos 1 e 2, de modo a minimizar o dispêndio incorrido na produção:

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1,x_2} & w_1x_1 + w_2x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1^{0,25}x_2^{0,25} - y = 0 \end{cases}$$

A solução desse problema é a mesma que corresponde ao ponto crítico da função

$$\mathcal{L} = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(x_1^{0,25}x_2^{0,25} - y)$$

As condições de primeira ordem são

$$(1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = w_1 - \lambda\, 0,25\, x_1^{-0,75} x_2^{0,25} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = w_2 - \lambda\, 0,25\, x_1^{0,25} x_2^{-0,75} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1^{0,25} x_2^{0,25} - y = 0$$

Dividindo (1) por (2), eliminamos o multiplicador λ, e encontramos a condição de que, na escolha ótima, os produtos marginais dos insumos são proporcionais aos respectivos preços

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\frac{0{,}25\, x_1^{-0{,}75}\, x_2^{0{,}25}}{0{,}25\, x_1^{0{,}25}\, x_2^{-0{,}75}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2\, x_2 \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1 \quad (4')$$

Substituindo (4) em (3):

$$(2x_2)^{0{,}25}\, x_2^{0{,}25} = y$$

$$x_2^{0{,}5} = 2^{-0{,}25}\, y \quad \text{(a)}\ x_2^* = 2^{-0{,}5}\, y^2 \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4) (a) $x_1^* = 2^{0{,}5}\, y^2$ (6)

(5) e (6) são as demandas dos insumos 1 e 2, condicionadas à quantidade produzida. A função custo é

$$C(y) = w_1 x_1^*(y) + w_2 x_2^*(y)$$

$$C(y) = 1 \cdot 2^{0{,}5}\, y^2 + 2 \cdot 2^{-0{,}5}\, y^2 = (2^{0{,}5} + 2^{0{,}5})\, y^2$$

(b) $C(y) = 2^{1{,}5}\, y^2 \cong 2{,}83\, y^2$

(c) Custo Médio $= \frac{C(y)}{y} \cong \frac{2{,}83\, y^2}{y^2} = 2{,}83\, y$

(d) Custo Marginal $= \frac{dC}{dy} \cong 5{,}66\, y$

A firma competitiva (tomadora de preços) escolhe y de modo a maximizar o lucro $\Pi = py - C(y)$. A condição de 1ª ordem (necessária) é: $d\Pi/dy = 0$

$$p - \frac{dC}{dy} = 0$$

OFERTA DA FIRMA:

$$p - 5{,}66\, y = 0 \quad \text{(e)}\ y = \frac{p}{5{,}66}$$

2. **Longo prazo** (todos os fatores e ou insumos são variáveis); **rendimentos constantes** de escala.
Função de produção: $y = x_1^{0,25}\, x_2^{0,75}$
Preços: $w_1 = 1$; $w_2 = 3$

Este exercício é semelhante ao anterior, mas a tecnologia exibe retornos constantes de escala

(a) $x_1^* = y$ e $x_2^* = y$

(b) $C(y) = 1y + 3y = 4y$

(c) Custo Medio $= \frac{4y}{y} = 4$ (constante)

(d) Custo Marginal $= \frac{dc}{dy} = 4$ (constante)

(e) Não se define a curva de oferta:
a firma tenta resolver
$\max_{y} \Pi = py - C(y)$
Condição de 1ª ordem $p = \frac{dc}{dy} \Rightarrow p = 4$

Nesse caso, a quantidade produzida não faz variar o custo marginal, de modo que:
se $p \neq 4$, não existe y^* que maximize o lucro;
Se $p = 4$, para qualquer quantidade produzida, o lucro será zero