também colineares.

3. Seja $\sigma: F \to F'$ uma semelhança. Mostre que dados 3 pontos não colineares $A, B, C$ em $F$, o ângulo $A'\hat{B}'C'$ é igual ao ângulo $A\hat{B}C$.

4 Sejam $F$ uma figura plana, $O$ um ponto fora de $F$ e $k$ um número real positivo. A cada ponto $A$ de $F$ associemos o ponto $A'$, no prolongamento de $AO$, tal que $\overline{OA'} = k.\overline{OA}$. Os pontos $A'$ assim obtidos formam uma Fig. $F'$. Mostre que a função $\sigma: F \to F'$ tal que $\sigma(A) = A'$ para todo $A \in F$ é uma semelhança de razão $k$.

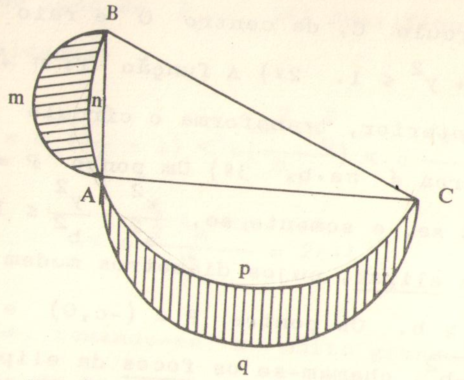
5. Prove que dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são figuras semelhantes.

6. Seja $ABC$ um triângulo retângulo. Do vértice $A$ do ângulo reto, baixe-se a perpendicular $AD$ sobre a hipotenusa $BC$. Prove que os triângulos $ABD$, $ADC$ e $ABC$ são semelhantes. Note que a área de $ABC$ é igual à soma das áreas de $ADC$ e $ABD$.

7. Seja $ABC$ um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $BC$. Sejam $F$, $G$ e $H$ figuras planas com as seguintes propriedades: 1ª) $F$ contém os pontos $A$ e $B$, $G$ contém os pontos $A$ e $C$, $H$ contém os pontos $B$ e $C$. 2ª) Existem semelhanças $\sigma: F \to H$ e $\tau: G \to H$ tais que

$\sigma(B) = B$, $\sigma(A) = C$, $\tau(A) = B$ e $\tau(C) = C$. Prove que área (H) = área (F) + área (G).

8. (Teorema de Pitágoras.) A área do quadrado que tem como lado a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados os catetos.




9. (Lúnulas de Hipócrates.) Na figura, ABC é um triângulo retângulo, BnApC, BmA e AqC são semicircunferências cujos diâmetros são, respectivamente, BC, AB e AC. Prove que a soma das áreas das figuras hachureadas é igual à área do triângulo ABC.

10. Consideremos no plano $\pi$ um sistema de coordenadas cartesianas (dadas por dois eixos ortogonais OX e OY). Consideremos dois números reais positivos a, b e definamos uma função $f: \pi \to \pi$ requerendo que $f(P) = P'$, onde $P = (x,y)$ e $P' = (ax, by)$. Em outras palavras, f transforma um ponto de coordenadas $(x,y)$ no ponto de

coordenadas $(ax,by)$. Prove que, uma figura qualquer $F$ no plano $\pi$, é transformada por $f$ numa Fig. $F'$ tal que área de $F' = ab \times$ (área de $F$).

11. Novamente, tomemos um sistema de eixos ortogonais $OX$ e $OY$ no plano $\pi$. Prove: 1º) Que um ponto $P = (x,y)$ pertence ao círculo $C$, de centro $O$ e raio 1 se, e somente se, $x^2 + y^2 \leq 1$. 2º) A função $f: \pi \to \pi$, definida no exercício anterior, transforma o círculo $C$ numa Fig. $E$ cuja área é $\pi a \cdot b$. 3º) Um ponto $P = (x,y)$ pertence à Fig. $E$ se, e somente se, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 4º) A Fig. $E$ chama-se uma <u>elipse</u>, cujos diâmetros medem $2a$ e $2b$. Suponhamos $a \geq b$. Os pontos $F = (-c,0)$ e $F' = (c,0)$, onde $c = \sqrt{a^2-b^2}$, chamam-se os <u>focos</u> da elipse. Prove que um ponto $P = (x,y)$ pertence à elipse $E$ se, e somente se, $\overline{PF} + \overline{PF'} \leq 2a$.

12. Chama-se <u>apótema</u> de um polígono regular $P$ à distância do centro de $P$ a um qualquer dos seus lados. Prove que a área do polígono regular é igual ao produto do apótema pela metade do perímetro.

13. O objetivo deste exercício é mostrar que, dado um círculo $C$ de raio $r$, a área de $C$ pode ser aproximada, com a precisão que desejarmos, pelas áreas dos polígonos <u>regulares</u> $P_n$, inscritos em $C$, e $Q_n$, circuns-

critos a C. (O índice $n$ indica o número de lados do polígono.) Sejam $c$ = área de $C$, $a_n$ = área de $P_n$, $b_n$ = área de $Q_n$ e $h_n$ = apotema de $P_n$. Evidentemente, o apótema de $Q_n$ é $r$. Prove os seguintes fatos: 1º) $\frac{b_n}{a_n} = (\frac{r}{h_n})^2$. 2º) $0 < r-h_n < \frac{1}{2}\ell_n$, onde $\ell_n$ é o comprimento do lado de $P_n$. 3º) Justifique as igualdades e desigualdades:

$$0 < b_n-a_n = a_n(\frac{r^2}{h_n^2} - 1) < c(\frac{r^2-h_n^2}{h_n}) < c\,\frac{(r-h_n)(r+h_n)}{\frac{r}{2}} <$$

$$< c\,\frac{\frac{1}{2}\ell_n\cdot 2r}{\frac{r}{2}} = 2c\cdot\ell_n.$$

4º) Conclua que, tomando-se $n$ muito grande, a diferença (positiva) área de $Q_n$ - área de $P_n$ pode tornar-se tão pequena quanto desejemos. Como

$$\text{área de } P_n < \text{área de } C < \text{área de } Q_n,$$

conclua que as área de $Q_n$ e de $P_n$ podem aproximar-se tanto quanto desejemos da área de $C$.

14. O comprimento de uma circunferência $C$ de centro $r$ é o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos inscritos em $C$ e cujas aproximações por excesso são os perímetros dos polígonos circunscritos. O comprimento de uma circunferência de raio $r$ é uma função $g(r)$ do raio. Prove, a partir da defini-