Segunda prova de Introdução à Teoria dos Números - Mat 223
Licenciatura em Matemática

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____
N^oUSP : ____

Prof. Eduardo do Nascimento Marcos

1. A prova pode ser feita a lápis;
2. Não é permitido o uso de calculadora;
3. Celulares e outras ferramentas eletrônicas devem ser desligados;
4. Boa Prova
5. Cada questão vale 2 pontos, se sua nota for maior que 10, ela será reduzida a 10. Tomara que seja.

1. Questão:

   Nesta questão cada ítem vale 0,2 pontos, sua nota neste ítem será calculada assim: Seja A= número de respostas certas e B o número de respostas erradas a nota na questão é o $\mathbf{max}\{0.2 \times (A - B), 0\}$. Em particular qualquer ítem não respondido não entra no cálculo da nota.

   1. Se todo elemento $\bar{x}$, não nulo, em $\frac{Z}{nZ}$ é tal que existe $\bar{y}$ com $\bar{x}.\bar{y} = \bar{1}$, então n é primo.
   2. No anel $\frac{Z}{nZ}$ onde n é um número natural maior que 1 , a equação $x^2 - 1 = 0$ tem no máximo 2 soluções.
   3. Se uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros tem solução modulo p para todo primo p então ela tem uma solução inteira.
   4. Se a equação $x^n = a$ com $n > 0$ e a inteiro tem uma raiz racional então essa raiz é inteira.
   5. Existe um único corpo com 6 elementos.
   6. Sejam a, b, c três inteiros. Se $a \mid bc$ e $a \nmid b$ então $a \mid c$.
   7. No anel de polinômios $\mathbb{R}[X]$ sempre que o produto de dois elementos é zero um deles deve ser zero.
   8. Sejam a e b inteiros primos com 22. Então eles são primos entre si se e somente se a equação $ax + by = 44$ tem solução.
   9. Uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tem sempre no máximo duas soluções no anel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   10. Sejam a e b inteiros positivos. Então, $\mathbf{mdc}(a, b) = \mathbf{mmc}(a, b)$ se e somente se $a = b$.

2. Questão:

   Prove ou dê contra exemplo.

   Se o polinômios $a_n x^n + \cdots + a_0$ com coeficientes inteiros tem uma raiz racional $\frac{p}{q}$ com $mdc(p, q) = 1$ então $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

3. Questão:

   Mostre que se $n > 1$ então a soma

$$1 + 1/2 + \cdots 1/n$$

   não é um número inteiro.

4. Questão:

   (a) Encontrar o dígito de 3^{100} quando expresso na base 7.

   (b) Mostre que p e q são primos distintos então $p^{q-1} + q^{p-1} \cong 1(mod\ pq)$

5. Questão:

Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonatti assim definida:

$$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 2$$

prove ou dê contra exemplo para as seguintes afirmações.

(a) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ para $n \geq 2$

(b) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ para $n \geq 1$

(c) $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1$

6. Questão:

   Enuncie e demonstre o teorema chinês dos restos.