

Atividade #3: Planejando um mapa de galáxias

1 Introdução

A nossa tarefa neste final de curso é planejar um levantamento de galáxias que nos forneça a maior quantidade possível a respeito da “natureza da energia escura”. O que as pessoas querem dizer com isso é: a equação de estado da energia escura é igual ou diferente de $w = -1$? Se ela for igual a -1 , então temos de fato uma constante cosmológica, e a Física tem um encontro marcado com alguma reformulação bastante radical, algo que finalmente consiga juntar a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. E se ela for diferente de -1 , temos alguma nova forma de matéria/energia no universo, ou até mesmo quem sabe alguma modificação da Relatividade Geral.

2 Observações do espectro de matéria

A evolução do campo de densidade do universo desde os primeiros segundos até a época presente, quase 14 bilhões de anos depois, envolve a evolução de perturbações de densidade nos fluidos de radiação, matéria bariônica, matéria escura e neutrinos, incluindo processos tais como espalhamentos e interações gravitacionais. De um modo geral, queremos descrever o contraste de densidade $\delta = (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ [onde $\bar{\rho}(t)$ é a densidade média no instante t] numa posição \vec{x} e num instante t em função do contraste de densidade inicial, num instante t_i . De modo abstrato temos algo como:

$$\delta(\vec{x}, t) = \int_{t_i}^t dt' d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}'; t, t') \delta(\vec{x}', t'). \quad (1)$$

Vimos em sala de aula que quando a matéria “fria” domina o conteúdo energético do universo (o que ocorre entre $1 \lesssim z \lesssim 1000$), a evolução do contraste simplifica muito, e temos que a Função de Green acima simplifica muito, $G \rightarrow \delta_D(\vec{x} - \vec{x}')\delta_D(t - t')a(t)/a(t_i)$ ¹, ou seja, durante a “era da matéria” $\delta(\vec{x}, t) \simeq a/a_i \delta(\vec{x}, t_i)$.

Porém, esse resultado vale durante uma certa época, e acaba sendo uma simplificação bastante grande. O cálculo completo é muito mais complexo, partindo de um campo Gaussiano (como previsto pela teoria da Inflação) e evoluindo um sistema de equações chamado de Equações de Einstein-Boltzmann até os dias de hoje. Além disso, precisamos prever a amplitude das flutuações em uma gama de escalas, compreendendo todas as escalas observáveis.

O modo mais simples de expressar essas flutuações é através do *Espectro de Potência da Matéria*, que é definido do seguinte modo. Primeiro, em vez de considerar o campo do contraste de densidade em espaço real, tomamos sua transformada de Fourier:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, t) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta(\vec{x}, t), \quad (2)$$

onde \vec{x} são coordenadas comóveis, e similarmente \vec{k} são os modos de Fourier comóveis. Note que a transformada inversa, segundo as nossas convenções (que em Cosmologia são o padrão) são dadas por:

$$\delta(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\delta}(\vec{k}, t). \quad (3)$$

¹Aqui, δ_D denota a função delta de Dirac. Se você não sabe o que é isso, não se preocupe, não é estritamente necessário para o restante do argumento

No limite do contínuo, ou seja, no limite de volume infinito, o espectro de potência é dado pelo *valor esperado* dos modos $\tilde{\delta}$ no mesmo instante:

$$\langle \tilde{\delta}(\vec{k}, t) \tilde{\delta}^*(\vec{k}', t) \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P_m(k). \quad (4)$$

Como a função delta de Dirac se anula quando o argumento é diferente de zero, essa expressão significa que os modos são variáveis aleatórias (Gaussianas!), correlacionadas apenas com elas mesmas. A *amplitude* dos modos cujos módulos são $k = |\vec{k}|$ dá, portanto, a amplitude das flutuações em comprimentos de onda $\lambda = 2\pi/k$.

Entretanto, o limite de volume infinito é interessante quando calculamos as predições de modelos teóricos; na prática, estamos sempre observando volumes finitos, e analisando quantidades finitas de dados. De fato, numa caixa retangular de lados L_x , L_y e L_z os modos de Fourier são dados por $k_x = n_x \times (2\pi/L_x)$, com n_x inteiro, e analogamente para as direções y e z . Além disso, se tivermos uma resolução espacial máxima tal que nosso elemento fundamental de volume é uma célula de lado l , teremos $N_x = L_x/l$ células na direção x , $N_y = L_y/l$ na direção y , e $N_z = L_z/l$ na direção z , perfazendo um total de $N_x \times N_y \times N_z = V/l^3$ células. No espaço de Fourier (agora no sentido de uma transformada discreta de Fourier) esse número é exatamente igual: teremos N_x “posições” para os modos de Fourier na direção x , e analogamente para as direções y e z . Ou seja, na prática temos sempre algo como um “grid” de células, tanto no espaço real quanto no espaço de Fourier.

Nesse caso de volumes finitos, é mais útil pensar no espectro de potência como sendo a amplitude média de modos de número de onda k , no seguinte sentido:

$$\left\langle \left| \tilde{\delta}(\vec{k}, t) \right|^2 \right\rangle_{|\vec{k}| \in k_a} = P_m(k_a), \quad (5)$$

onde a média $\langle \dots \rangle$ acima é sobre todos os modos tais que os modos \vec{k} que contribuem para essa média pertencem ao “bin” k_a , ou seja, $k_a - \Delta k_a/2 \leq |\vec{k}| < k_a + \Delta k_a/2$. Note que num volume finito essa média é sempre sobre um número finito de modos.

A Fig. [?] mostra o espectro de matéria em redshift $z = 0$ num modelo cosmológico padrão. A curva em preto mostra a previsão teórica (no limite do contínuo), e os pontos azuis correspondem a observações “ideais” num volume finito, incluindo as barras de erro. Você também pode obter essas curvas teóricas, basta instalar um pacote que resolve as equações de Einstein-Boltzmann – por exemplo, o CAMB (<https://camb.info/>) ou o CLASS (<http://class-code.net/>).

3 Matriz de Fisher dos dados

Queremos partir de dados que possuem erros realísticos, e chegar numa expressão para a matriz de Fisher dos parâmetros cosmológicos mais relevantes (no nosso caso, Ω_m , h e, claro, w). Para isso precisamos de uma expressão que nos diga quais erros esperamos para os nossos dados. Isso, claro, depende de muitos fatores complexos: o volume mapeado, o número de galáxias que conseguimos detectar, a própria amplitude do espectro, etc. A expressão para esse erro nos dados (a “covariância dos dados”) foi obtida pela primeira vez por H. Feldman, N. Kaiser e J. Peacock em 1993, num artigo que pode ser encontrado no link: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9304022>. Uma conta um pouco mais simples está feita nos primeiros capítulos de artigo meu, <http://arxiv.org/abs/arXiv:1505.04106>. Note que vocês não precisam saber fazer essa derivação! Basta saber que o resultado dessa conta significa que o erro relativo numa medida do espectro de potência é dada por:

$$\frac{\sigma^2[P_m(k_a)]}{[P_m(k_a)]^2} = \frac{2(2\pi)^3}{V_{Tot} 4\pi k_a^2 \Delta k_a} \left[\frac{A P_m(k_a)}{1 + A P_m(k_a)} \right]^2 \quad (6)$$

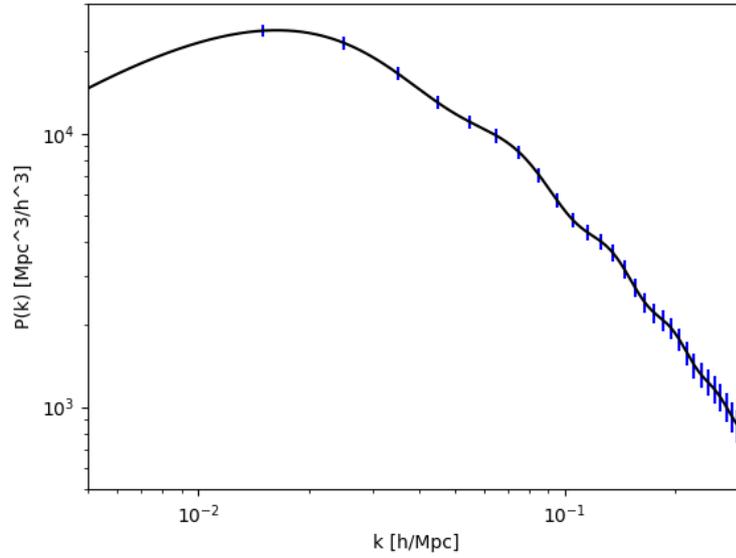


Figura 1: Exemplo de espectro de potência da matéria: teoria (linha negra) e “dados” (pontos e barras de erro azuis).

onde V_{Tot} é o volume total do seu mapa de galáxias, Δk_a é a largura do seu *bin* de k_a (que vamos fixar para todos os bins em $\Delta k_a = 0.01 h \text{ Mpc}^{-1}$), e A é uma constante que envolve propriedades tais como o número de galáxias do mapa, o *bias* das galáxias, e a função de crescimento da matéria. De um modo geral, essa constante é algo complexo e depende de muitas variáveis, inclusive do redshift, porém para esse exercício vamos tomar um valor constante, $A = 10^{-3} h^3 \text{ Mpc}^{-3}$. Nós também vamos tomar um volume fixo no nosso modelo cosmológico padrão, $V_{Tot} = \bar{V} = 10h^{-3} \text{ Gpc}^3 = 10^{10}h^{-3} \text{ Mpc}^3$.

A expressão acima não é nada mais do que a “covariância dos dados”, e ela significa, implicitamente, que uma medida do espectro numa escala k_a não tem nenhuma correlação com uma medida do espectro numa escala diferente $k_b \neq k_a$. Ou seja, temos que $C_{ab}^P = Cov[P_m(k_a), P_m(k_b)] = \sigma^2[P_m(k_a)] \delta_{ab}$. Agora, vamos lembrar que a matriz de Fisher é a inversa da matriz de covariância, logo obtemos que:

$$F_{ab}^P = [C_{ab}^P]^{-1}. \quad (7)$$

4 Matriz de Fisher dos parâmetros cosmológicos

Queremos agora “projetar” essas estimativas dos erros nas medidas de $P_m(k)$ em estimativas para as incertezas que vamos poder derivar sobre os parâmetros cosmológicos. Para isso, vamos nos recordar de alguns resultados derivados em sala de aula sobre matrizes de Fisher². Em particular, lembre-se de que se tomamos uma matriz de Fisher originalmente escrita para graus de liberdade x^i , e queremos a matriz de Fisher para parâmetros y^μ , a transformação da matriz de Fisher se dá segundo os Jacobianos dessa “transformação de coordenadas”:

$$F[y^\mu, y^\nu] = \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} F[x^i, x^j] \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu}. \quad (8)$$

²Para uma revisão sobre Matrizes de Fisher, num contexto muito parecido, um texto bastante enxuto pode ser encontrado aqui: <https://arxiv.org/pdf/0906.4123.pdf>.

Note que a expressão acima significa que a Matriz de Fisher é uma métrica nesse “espaço de informação”!

No caso em questão, vamos definir nossos parâmetros como $\theta^\alpha = \{\Omega_m, h, w\}$, e assim obtemos:

$$F[\theta^\alpha, \theta^\beta] = \sum_{i,j} \frac{\partial P_m(k_a)}{\partial \theta^\alpha} F_{ab}^P \frac{\partial P_m(k_b)}{\partial \theta^\beta}. \quad (9)$$

Portanto, a sua tarefa será, em boa parte, a de calcular as derivadas parciais desses Jacobianos. Para esse cálculo você deve notar que há algumas maneiras pelas quais uma variação do modelo cosmológico leva a uma mudança na medida do espectro no volume do seu mapa de galáxias.

A primeira mudança que pode ocorrer é que o volume físico num certo intervalo de redshift pode variar conforme o modelo cosmológico. Digamos que o nosso volume “padrão” \bar{V} é calculado usando nossa cosmologia padrão, na qual $\theta^\alpha = \bar{\theta}^\alpha$ (de modo geral, vamos tomar $\bar{\Omega}_m = 0.3$, $\bar{h} = 0.7$ e $\bar{w} = -1$). Se fizermos uma variação em torno dessa cosmologia, o volume também vai variar um pouco, aumentando ou diminuindo conforme for o caso. Mas o espectro depende sensivelmente desse volume – por sinal, o espectro tem dimensões de volume! Como o volume é o produto da área na direção transversal pela distância na direção radial, um volume que ocupa uma determinada área e um determinado intervalo de redshift em torno de um redshift central z_0 vai variar como:

$$\frac{V}{\bar{V}} = \left(\frac{D_A(z_0)}{\bar{D}_A(z_0)} \right)^2 \left(\frac{\bar{H}(z_0)}{H(z_0)} \right) \equiv v(\theta^\alpha), \quad (10)$$

onde as barras denotam quantidades computadas no modelo padrão (fiducial).

A segunda mudança que vai ocorrer também é relacionada a essa mudança nas distâncias que são inferidas quando alteramos os parâmetros do nosso modelo cosmológico. Como o número de onda é o recíproco de uma escala de distância, os modos k também são afetados. Como a distância é associada ao volume, a mudança no número de onda pode ser descrita como:

$$\frac{k}{\bar{k}} = v^{-1/3}. \quad (11)$$

Agora o seu papel é calcular as derivadas parciais desses Jacobianos, com bastante cuidado, lembrando que o sentido de uma derivada parcial é que as variações numa determinada variável devem ser feitas mantendo as outras variáveis fixas. Se eu não errei nenhuma conta, o resultado (que vocês devem reproduzir nas contas do relatório desta Atividade Prática) deve ser:

$$\frac{\partial P_m(k_a)}{\partial \theta^\alpha} = \left\{ \frac{\partial \ln v}{\partial \theta^\alpha} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{\partial \ln P_m(k_a)}{\partial \ln k_a} \Big|_{\theta^\alpha = \bar{\theta}^\alpha} \right] + \frac{\partial \ln P_m(k_a)}{\partial \theta^\alpha} \Big|_{k_a = \bar{k}_a} \right\} \times P_m(k_a). \quad (12)$$

Resumindo: para encontrar a matriz de Fisher dos parâmetros cosmológicos vocês devem calcular as derivadas que aparecem na expressão acima. Para duas delas vocês vão precisar de alguma ajuda numérica: as derivada do espectro da matéria com respeito ao número de onda, e com respeito aos parâmetros. Para isso, vocês vão encontrar no site da disciplina quatro arquivos: *k_Pk_fid.dat*, *k_Pk_Delta_Om.dat*, *k_Pk_Delta_H0.dat*, *k_Pk_Delta_w.dat*. O primeiro arquivo é uma tabela com os valores de k_a e de $P_m(k_a)$ no modelo fiducial; os outros três arquivos correspondem à mesma tabela, mas calculada para modelos nos quais $\theta^\alpha = \bar{\theta}^\alpha + \Delta\theta^\alpha$, onde $\Delta\theta^\alpha = \{0.01, 0.0001, 0.01\}$. Ou seja, as variações em Ω_m e em w são de 0.01, enquanto a variação em h é de 0.0001. Com isso vocês podem estimar as derivadas através das diferenças discretas.

Este documento ainda será editado mais à frente, conforme as necessidades de vocês forem surgindo. Por enquanto, eu acho que as informações contidas aqui são suficientes para que vocês comecem esse projeto.

Finalmente, um detalhe importante: o que vocês podem escolher é o redshift no qual vocês vão focar o seu mapa de galáxias. Vocês podem escolher qualquer redshift entre $z = 0.2$ e $z = 2.0$. O objetivo, claro, é minimizar o erro na equação de estado w .