UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Problemas Clássicos

Arthur Rocha	8603410
Hans Willians	9021215
Jordan Carvalho	9298830
Matheus Serpa	9010196
Paulo Cardoso	9299240

São Paulo
Outubro/2018

Contexto Histórico

Conhecida como o berço da civilização ocidental, a Grécia recebe esse nome justamente pelo fato de ser o país onde surge a filosofia, a literatura, a dramaturgia, a democracia e a matemática demonstrativa. Este último campo se deve muito à escola jônica que foi fundada por Tales de Mileto e da escola pitagórica, além disso, muitos outros centros de matemática apareceram e desenvolveram em lugares e momentos diferentes da história grega.
Para entendermos ainda mais as contribuições grega para a matemática, é necessário voltar mais ou menos 1200 a.C. Este foi um período em que as tribos primitivas dóricas, segundo historiadores, que eram povos que viviam em regiões montanhosas ao norte, passaram a se mover em direção ao sul da península grega em troca de terras mais favoráveis. Sua tribo principal são os espartanos que logo em seguida criaram a cidade de Esparta. A chegada dos Dórios fez com que os habitantes locais migrassem para outras regiões, muitos fugiram para a Ásia Menor e com o decorrer dos anos, estabeleceram colônias comerciais gregas. Foi nessas colônias, que surgiu a escola jônica, a filosofia e a geometria demonstrativa.
Paralelamente a estes acontecimentos, a Pérsia tornou se um grande império militar. Seu crescimento fez com que empreendesse a conquista das cidades jônicas e das colônias gregas da Ásia menor por volta de 546 a.C. Muitos filósofos tiveram que abandonar sua terra natal em busca de paz nas colônias gregas no sul da Itália, entre eles estavam Pitágoras e Xenófanes. Consequentemente, nascem escolas de filosofia e matemática.

Fonte: arquivohistory.blogspot.com

Por volta do ano 499 a.C, as cidades jônicas dominadas revoltaram se, pois naquela época o rei Dário da Pérsia começava a cobrar pesados impostos sobre as cidades. Nesse contexto, Atenas, uma cidade grega, ajudou os rebeldes com armamentos. Sua interferência foi o estopim para que a Pérsia focasse sua atenção em dominar a Grécia. Houveram muitas investidas da Pérsia sobre a Grécia na tentativa de invadi-la, mas no fim, todas foram fracassadas. Até mesmo Xerxes, filho de Dário não conseguiu nada. Diante dos acontecimentos, Atenas se consolidava cada vez mais e os próximos cinquenta anos foram de muita prosperidade. Atenas de tornou o centro do progresso democrático e intelectual. Como consequência, muitos matemáticos começaram a se reunir na Grécia.

Após ter passado os cinquenta anos, a Grécia entra em guerra ao mesmo tempo em que é atacada por uma peste onde um quarto da população foi dizimada, desde então, Esparta toma o controle da Grécia onde teria domínio por pelo menos sessenta anos. Passado então este momento, a Grécia retomado a posse de suas terras, daí os pitagóricos obtiveram permissão para seguir seus trabalhos.
Passado a Guerra do Peloponeso, Atenas recupera sua liderança cultural. Nessa época nasce Platão. Este passou a viajar por várias partes do mundo em busca do saber. Quando voltou a Atenas, cria uma academia com propósitos investigativos. Juntamente com Platão existiram outros gênios que fizeram grandes contribuições para a matemática como Eudoxo, Menaecmo, Teeteto e Aristóteles.

Os três problemas Clássicos

Uma das linhas de desenvolvimento inicial da matemática grega é o da geometria superior, ou seja, geometria de curvas que não são a reta e a circunferência e também superfícies que não sejam o plano e a esfera. È importante destacar, que o surgimento dessas curvas vem dos seguintes problemas: Duplicação do cubo, trissecção do triângulo e quadratura do círculo.
O primeiro problema consiste em construir o lado de um cubo no qual seu volume é o dobro do cubo dado. O segundo problema é, dado um ângulo qualquer, dividir em três partes iguais. Por último, dado um círculo, construir um quadrado de mesma área.

Importância desses problemas se dá pelo fato de serem impossíveis de se resolverem apenas com régua e compasso. Foi necessário mais de 2200 para provar que são impossíveis de se resolverem só com os instrumentos fornecidos. Os gregos, motivados em encontrar a solução para estes problemas, embora não tendo sucesso, foram premiados com muito sucesso em outros pontos tais como as secções cônicas, curvas cúbicas e quárticas e muitas curvas transcendentes e etc.

Os instrumentos de Euclides

Antes de prosseguirmos, é necessário deixar claro o que pode ser feito com régua e compasso. Com a régua pode se traçar uma reta de tamanho qualquer passando por dois pontos. Já com o compasso, podiau se fazer uma circunferência com centro dado passando por um ponto estabelecido. Apenas com essas duas regras, era de se admirar o que poderia ser construído.Tanto que os gregos acreditavam que esses problemas também teriam solução.
Como nos elementos de Euclides só podia usar régua e compasso, estes materiais ficaram conhecidos como instrumentos de Euclides.

A duplicação do cubo

Há duas lendas acerca deste problema, a primeira delas citada por *Theon of Smyrna* na obra de *Eratóstenes.*

"Eratóstenes, em seu trabalho intitulado Platônico, relata que, quando o deus proclamou aos Délias através do oráculo que, para se livrar de uma praga, eles deveriam construir um altar que fosse o dobro do existente, seus artesãos ficaram em grande perplexidade seus esforços para descobrir como um sólido poderia ser feito o dobro de um sólido similar; Eles, portanto, perguntaram a Platão e ele respondeu que o oráculo significava não que o deus quisesse um altar do dobro do tamanho, mas que desejava, ao colocá-los na tarefa, envergonhar os gregos por negligenciar a matemática e seu desprezo pela geometria."

A segunda, *Eratóstenes* conta-se que há uma carta escrita ao rei *Ptolomeu*.

"*Eratóstenes ao rei Ptolomeu, saudações. A história conta que um dos poetas trágicos antigos representou Minos tendo uma tumba construída para Glaucus, e que quando Minos descobriu que a tumba media trinta metros de cada lado, ele disse "Muito pequeno é o túmulo que você marcou como o real. lugar de descanso. Deixe ser duas vezes maior. Sem estragar a forma, rapidamente dobre cada lado da tumba". Isso foi claramente um erro. Pois, se os lados são dobrados, a superfície é multiplicada quatro vezes e o volume é multiplicado por oito."*

Ambas as lendas, foram criadas em concordância com os eventos ao qual foram atrelados, seja no período em que houvera a peste em Atenas ou quanto ao episódio do rei Minos na mitologia grega. Apesar da existência destas lendas, as origens que acarretaram na origem deste problemas é um tanto incerta. Uma vez compreendida a essência que as lendas trazem para este problemas, pode-se realizar enunciar este de tal modo:

Seja um cubo qualquer de aresta a, determinar, usando apenas régua não graduada e compasso, a aresta b de outro cubo, onde o seu volume seja o dobro do volume do primeiro cubo, isto é, construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado.

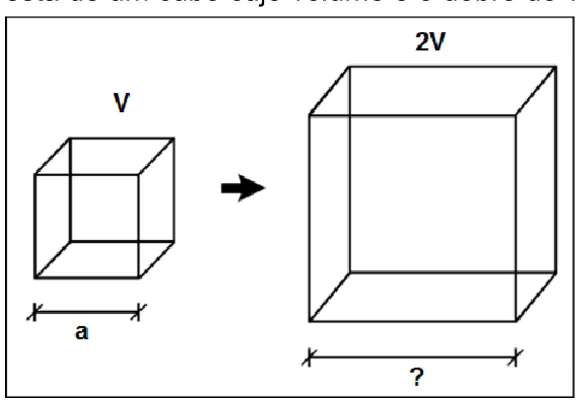


Imagem - Duplicação do volume do cubo | Fonte: ReserchGate

A resolução

O precursor na resolução deste problema foi Hipócrates.

Hipócrates de Chios: Pouco sabe-se sobre ele, mas relata-se da sua distinção para com a Geometria, que além de trabalhar neste problema clássico envolveu-se com o problema da *Quadratura do Círculo*.

Para resolver, ele o reduziu da seguinte forma:

Dadas duas linhas, encontre duas proporções médias entre elas. Isto é, dadas as linhas a , b encontre x , y tal que $a : x = x : y = y : b$.

Agora é fácil com o nosso entendimento de relação ver que:

$$1^3 : x^3 = (a : x)^3 = (a : x)(x : y) (y : b) = a : b$$

Assim, dado um cubo com lados *1* e quer construir um cubo $b : 1$ vezes o volume, precisamos construir o cubo de lado x .

A partir de então, todas as tentativas de duplicação do cubo seguiram esse caminho de tomar duas médias proporcionais entre dois segmentos de retas.
Arquitas tomou um caminho diferente. Para ele a solução do problema está em encontrar um ponto de intersecção entre um toro, um cilindro circular reto e um cone circular reto. Este caminho adotado por ele, fez com que a geometria desse um salto e então passou a ser observada a partir de outras perspectivas. Menaecmo, deu duas soluções para este problema, para isso, ele inventou as seções cônicas.Diocles com o mesmo objetivo, criou uma curva chamada sissóide.
É interessante notar que, embora os gregos não conseguissem resolver o problema com régua e compasso,tiveram que solucionar o problema de outras maneiras, para isso os matemáticos criaram curvas transcendentes e ferramentas para auxiliá los. É importante destacar também que todas essas descobertas fizeram a matemática dar um salto qualitativo fazendo com que esta areá ajude outras áreas do conhecimento que por sua vez contribuiu para o desenvolvimento humano.

Quadratura do Círculo

O problema consiste no seguinte, seja um círculo qualquer construir, usando apenas régua não graduada e compasso, um quadrado, cuja área seja igual à área desse círculo.

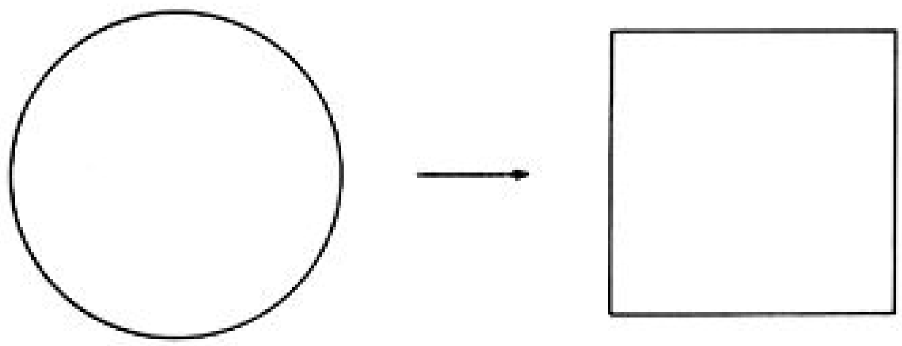


Imagem: Quadratura do círculo | Fonte: RPM (www.rpm.org.br)

Um dos pioneiros da quadratura do círculo foi Anaxágoras, um filósofo que ficou famoso por ser o primeiro a introduzir filosofia aos atenienses em torno de 480 a.C. Anaxágoras morreu em 428 a.C., no mesmo ano em que Arquitas nasceu.

Após Anaxágoras, temos Hipócrates, por volta de 460 a.C., que em suas pesquisas introduziu a questão das lúnulas e suas quadraturas com régua e compasso.

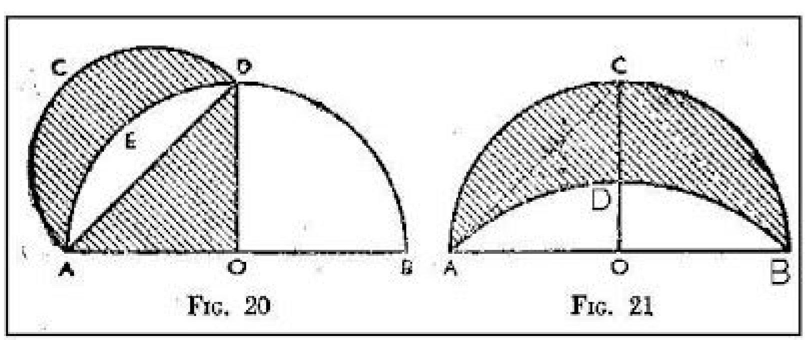


Imagem: Lúnulas de Hipócrates

Em seguida, 430 a.C., vem Antifon, o sofista, contemporâneo de Sócrates que introduziu a ideia de inscrever no círculo poligonal com número de lados cada vez maior e, no final, acreditava que algum polígono coincidiria com o círculo, como a quadratura dos polígonos é possível com régua e compasso.

Vale notar que a construção da quadratura do círculo é impossível utilizando somente régua e compasso, segue abaixo demonstração.

A demonstração

Vale lembrar que na grécia antiga eles não tinham conhecimento da Álgebra, com isso eles conseguiam construir números utilizando somente linhas e círculos.

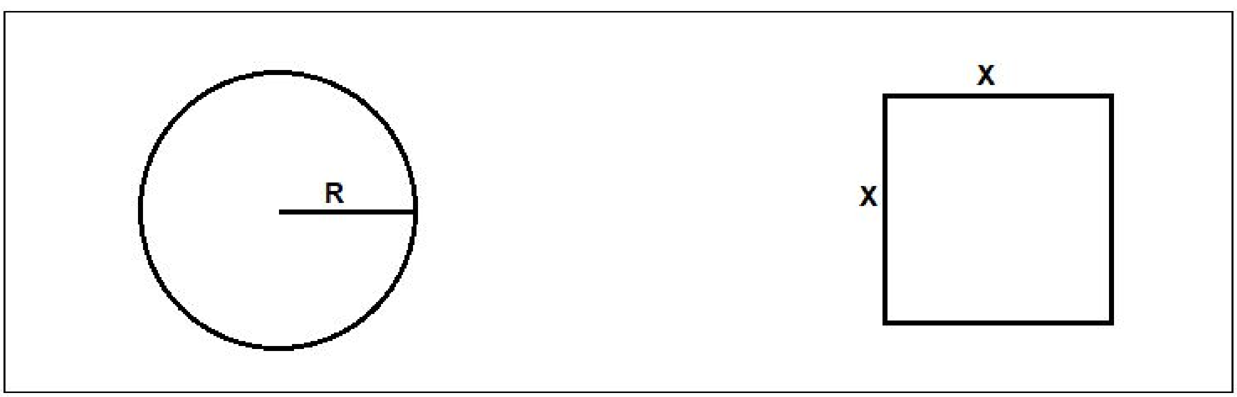
Para construção das linhas era utilizado algum tipo de superfície reta, como uma régua, e para construção de círculos um compasso.

Utilizando régua e compasso podemos fazer algumas operações bem como:

- Somar e subtrair números;
- Multiplicar e dividir números;
- Extrair a raíz quadrada de um número.

Os números que conseguimos obter utilizando somente essas regras, são chamados de números construtíveis.

Voltando ao problema, vamos tomar um círculo com raio igual a R e quadrado de lado X



Logo, a área do círculo é igual a A = ΠR^2 e a área do quadrado, A', é igual a A' = X^2.

Pela quadratura do círculo, temos que A = A'. Logo:

$$\Pi R^2 = X^2$$

Com isso:

$$X = R\sqrt{\Pi}$$

Absurdo, pois Π é um número transcendental, ou seja, não é um número construtível utilizando somente régua e compasso, e por isso a quadratura do círculo é impossível utilizando somente régua e compasso.

O problema tem solução?

Foi dito acima que o problema da quadratura do círculo não tem solução, mas isto quer somente dizer que não é possível construir, usando apenas régua e compasso, um quadrado com a mesma área que a de um círculo dado.

Usando outras ferramentas, tal como a quadratriz de Hípias, é possível resolver o problema. Segue abaixo um link com a demonstração da quadratura do círculo com ferramentas mais avançadas mas que foge da condição inicial de utilizar somente régua e compasso.

Link:
http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMT668.Student.Folders/RothJennifer/Essay2/Quadrat.html

Trissecção do ângulo

O problema em questão consiste em trissectar um ângulo qualquer com a utilização de apenas régua não graduada e compasso.

Este problema em específico teve seu notório significado para o desenvolvimento da matemática, visto que possibilitou o estudo infindável de novas técnicas para construções geométricas além de que novas curvas foram desenvolvidas, bem como a invenção de novos instrumentos auxiliares para a resolução desse problema em específico.

Em alguns aspectos podemos notar as peculiaridades desse problema em relação aos outros dois, um dos aspectos aqui notáveis, é que podemos apenas com equipamentos citados anteriormente, euclidianos, trissectar alguns ângulos especiais, como o caso do ângulo de 90º.
Apresentaremos a seguir algumas das tentativas de trissecção de um ângulo qualquer e para tal utilizaremos como base a trissecção do ângulo de 90º, deste modo, apresentaremos a construção detalhada do ângulo de 30º, que nos dará base para a apresentação breve de cada uma das tentativas durante o período grego, por meados do século V a.c.

Para trissectar um ângulo reto $m(A\hat{B}C) = 90^{\circ}$, utilizando apenas equipamentos euclidianos, basta traçar um círculo C_1 de centro em B e raio r qualquer, com $r > 0$, irá cortar a reta $\overleftrightarrow{BC}$ em um ponto D, em seguida construiremos outra circunferência, C_2, de centro em D e mesmo raio r arbitrário escolhido na primeira parte da construção. Essa nova circunferência intercectará a primeira em dois pontos, que chamaremos de $E \text{ e } F$, desse modo podemos dizer que $\Delta BED \text{ e } \Delta BFD$ são equiláteros de lado r, pois são raios das duas circunferências e portanto $m(E\hat{B}D) = m(E\hat{D}B) = m(B\hat{E}D) = 60^{\circ}$. Essa trissecção foi demonstrada por Pappus no livro IV da coleção matemática. A figura a seguir ilustra a demonstração apresentada.

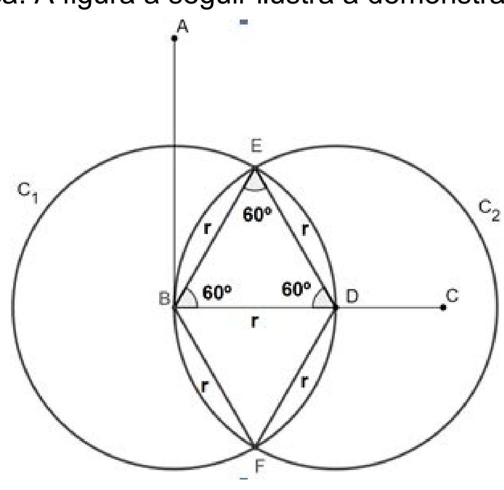


Imagem: Confecção própria.

Uma das soluções foi conhecida como a redução a uma construção por nêusis, palavra de origem grega que significa apontar ou inclinar, esse tipo específico de construção consiste em inserir entre duas curvas ou segmentos previamente apresentados, um segmento de tamanho predefinido de modo que o seu prolongamento passe por um ponto fixo.

A solução de Nicomedes, este foi um matemático que inventou um equipamento capaz de produzir uma curva que foi chamada de conchóide, esta curva além de suas propriedades consideradas peculiares para a resolução de outros problemas, serve também para a trissecção de um ângulo agudo, dado que para a trissecção de um ângulo obtuso, utiliza-se a trissecção por régua e compasso de um ângulo de 90º, e sendo assim a partir deste trabalha-se apenas com o ângulo agudo, essa curva utiliza o método de construção por nêusis citado anteriormente.

A solução de Hípias não segue o mesmo tipo de construções citadas anteriormente, esta por sua vez, utiliza da construção de uma curva especial conhecida com trissectriz, onde não iremos dar detalhes mais específicos, tais detalhes podem ser encontrados na bibliografia de nosso trabalho, a demonstração para provar por que essa curva serve para trissectar um ângulo não é de fato trivial, mas é extremamente possível de ser compreendida.

Das soluções, apresentaremos também as atribuídas a Arquimedes, existem pelo menos duas soluções apresentadas que foram atribuídas a Arquimedes, uma utiliza o processo geométrico de construção por nêusis, já o outro método que foi atribuído a ele trata-se da utilização da Espiral de Arquimedes para a trissecção de um ângulo qualquer.

Buscaremos também abordar as questões educacionais envolvendo os três problemas clássicos, vinculando cada um deles ao ensino. A heurística torna-se extremamente importante sendo capaz de possibilitar novas ideias em muitas áreas do conhecimento, esta poderia ser mais incentivada afim de promover maior aprendizagem e dinamismo no processo de educação.

Uma questão importante a ser trazida diante dos problemas apresentados são referentes à sua discussão e aplicabilidade no ensino básico, tendo em vista que o nosso curso é um curso de licenciatura. Muitas vezes nos vemos diante de nossos alunos que possuem em muitas vezes a concepção de que o conhecimento é algo que já vem às nossas mentes de forma pronta e previamente preparado, o que de fato pode causar ao aluno a falsa sensação de que a parte histórica não é realmente relevante ao ensino de matemática.

E por que não "misturar" História de Matemática com Matemática? por que não discutir com os alunos a importância e relevância de cada um dos problemas apresentados ? Um fator que nós do grupo conversamos que poderia ser interessante, é o fato da motivação aos alunos em instiga-los a querer entender como se resolveu determinado problema e quem foi o grande pensador ou pensadores responsáveis, a qual grupo se atribui um determinado Teorema, em qual época e qual foi a sua necessidade e proposições, quais hipóteses e reses desejavam alcançar, e quais foram os meios tomados para a resolução de cada um de seus problemas.

Para Suemilton Nunes (pg.61) "O ensino atual, que ainda é centralizado no educador, é dado, a meu ver equivocadamente, através de transmissão de conceitos e definições perfeitas e acabadas, o que pode causar no aprendiz a falsa ideia de que o conhecimento sempre esteve pronto e que foi concebido milagrosamente." O que de fato o nosso grupo concorda, como apresentado anteriormente.

Suemilton ainda diz "Com isso, se o sistema educacional se comportar desta maneira, pode tornar a educação científica frágil, pois, ao limitar a criatividade dos estudantes, poderemos estar perdendo novas invenções (...)", de fato em conversa com os integrantes do grupo, nós fazemos das palavras dele as nossas, os alunos precisam de inspiração, precisam de alternativas de ensino, onde mostrar que ainda hoje muitas descobertas são feitas até mesmo na matemática, sendo essa uma ciência que os alunos julgam como imutável.

Referências

LEME, Charles - Grécia Antiga II: as guerras da civilização grega. 2015. <http://arquivohistory.blogspot.com/2015/12/grecia-antiga-ii-as-guerras-da.html>. acesso em: 30 out. 2018

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 2.ed.Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 1997.

BOYER, Carl.; GOMIDE, Elza. **História da matemática**. 2.ed.São Paulo, SP. Editora EDGARD BLUCHER LTDA,1998.

Gervázio, S. N. **O potencial heurístico dos três problemas clássicos da matemática grega.** 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45131/tde-09032016-175703/pt-br.php>. Acesso em 15 ago. 2018

Rafael, M. G. **Um estudo sobre três problemas clássicos da geometria euclidiana** 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45131/tde-09032016-175703/pt-br.php>. Acesso em 16 ago. 2018

MacTutor History of Mathematics archive. **Doubling the cube.** Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Doubling_the_cube.html>. Acesso em 15 ago. 2018

MacTutor History of Mathematics archive. **Hippocrates of Chios.** Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hippocrates.html>. Acesso em 25 out. 2018

ResearchGate. **Duplicação do Cubo.** Disponível em: <https://www.researchgate.net/figure/312222332_fig2_Figura-3-Duplicacao-do-Cubo>. Acesso em: 28 out 2018