

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Geometria Espacial

Gustavo Chagas de Moraes nºUSP 9300821
Natasha Kaori Yokota Santos nºUSP 8945371
Rafaela Godoy nºUSP 10739844
Renê Ferreira Porto nºUSP 9301965

Geometria Babilônica (2000-1600 a.C.)

A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. Eles já estavam familiarizados com várias regras da geometria plana, e sobre a geometria espacial: se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura; era de entendimento o volume de um paralelepípedo reto-retângulo mas também o volume de um prisma reto de base trapezoidal. O volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular eram calculados erroneamente como o produto da altura pela soma das bases dividido por dois.

Geometria no Egito

Houveram dois papiros que são as principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga. O primeiro em 1850 a.C. é o papiro Moscou ou Golenischev, um texto matemático que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado. O seguinte em 1650 a.C. é o papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

26 dos 110 problemas dos papiros citados são geométricos, muitos deles o foco era a mensuração de áreas de terras e volumes de grãos. Tinham conhecimento que o volume de um cilindro reto é o produto da área da base pelo comprimento da altura, e notavelmente há no papiro Moscou um exemplo correto da fórmula do volume de um tronco de pirâmides de bases quadradas. Não houve nenhum outro exemplo conhecido antes na matemática oriental antiga que chegasse perto dessa fórmula, e muitas conjecturas foram sugeridas a respeito de como ela teria sido descoberta.

Os sólidos regulares (Matemática Pitagórica)

Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares congruentes e se seus ângulos poliédricos (os formados entre dois planos de um diedro, triedro ou poliedro) são todos congruentes. Embora existam polígonos regulares de todas as ordens, sucede que só há cinco poliedros regulares diferentes, e eles são designados de acordo com o número de faces que possuem, como mostra a figura a seguir.

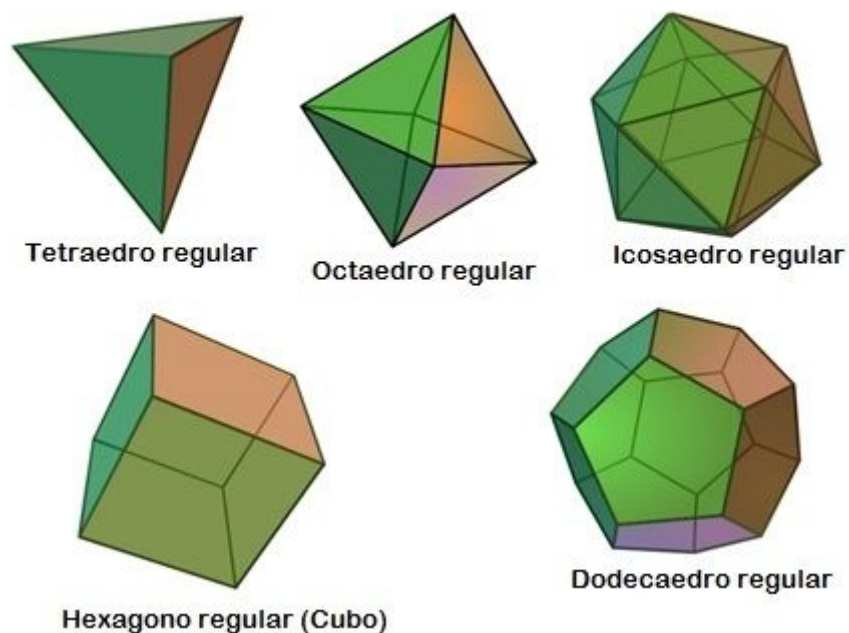


Figura 1: Os cinco sólidos regulares.

As histórias precursoras desses sólidos estão perdidas no passado, há um início de tratamento matemático desses poliedros regulares no Livro XIII dos *Elementos* de Euclides. Platão, em seu *Timeu*, apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos juntando triângulos, quadrados e pentágonos para formar suas faces. Herdando a parte mística que mistura a matemática com o sobrenatural dos pensadores precedentes, ele associa os quatro sólidos mais fáceis de construir (o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo) com os quatro elementos (fogo, ar, água e terra). E o quinto sólido (dodecaedro) era associado ao Universo que nos cerca, sem muitas explicações concretas.

O grande astrônomo, matemático e numerologista Johann Kepler (1571-1630), deu uma explicação mais elaborada para as associações feitas por Platão. Ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro contém o menor volume para sua superfície, e o icosaedro o maior. Agora ele liga essa associação volume-superfície com *secura* e *umidade*, respectivamente. Como o fogo é o mais seco dos quatro elementos e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Relaciona-se o cubo com a terra pois com uma de suas faces no chão, é o sólido com maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente gira, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 divisões.

Euclídes e seu legado

Depois da morte de Alexandre, o Grande seu império foi dividido entre vários militares por área, a região do Egito foi liderada por Ptolomeu que escolheu Alexandria como sua capital, tanto geográfica quanto intelectual e lá fundou a universidade de Alexandria, onde também estava presente a vasta biblioteca de Alexandria. Para promover grandemente o poder intelectual da universidade, diversos dos nomes mais promissores de diversas áreas, incluindo entre eles, Euclides, com origem hoje não muito clara, mas com provável formação Ateniense.

Com vasto trabalho ao longo de toda sua vida, Euclides, professor e provável fundador da escola de matemática de Alexandria têm grande contribuição quanto à geometria espacial, sendo chamado por muitos de “o pai da geometria”; seus trabalhos quanto ao tema na sua gigantesca obra “Elementos” serviu de base para o futuro da geometria espacial.

A obra continha não apenas geometria nas suas 465 proposições, mas também álgebra, teoria dos números e afins, dividido em 13 livros, a parte focada em geometria se encontrava nos livros I, III, IX, VI, XI e XII da obra.



Figura 2: Parte de uma página da primeira edição impressa dos Elementos de Euclides, feita em Veneza em 1482

O que estabeleceu o solo para futuros estudos e aprendizados de geometria na obra de Euclides podem ser sintetizados em axiomas e postulados, que têm até hoje peso, sendo quase que atemporais.

- Axioma 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- Axioma 2: Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- Axioma 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Axioma 4: Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- Axioma 5: O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

E postulados:

- Postulado 1: Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;
- Postulado 2: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- Postulado 3: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
- Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes);
- Postulado 5: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se forem estendidas indefinidamente. (Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas)

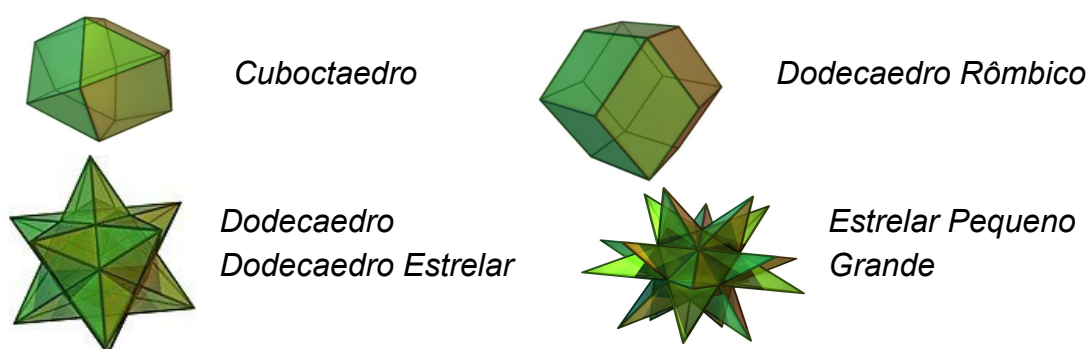
Euclides deixou com a obra um legado gigantesco, sendo principalmente reconhecido principalmente pelos axiomas e postulados, sendo a geometria que segue rigidamente esses a “Geometria Euclidiana”, também surgiu ao longo dos anos tentativas de demonstração do seu quinto postulado, nasceu a “Geometria não-Euclidiana” que segue todos os postulados com exceção do quinto.

Kepler e o estudo dos sólidos

O alemão Johann Kepler foi um dos precursores do cálculo, aplicando uma ideia de integração para calcular o volume de 93 sólidos em seu livro "Geometria sólida dos barris de vinho", de 1615.

Além de estudar curvas rotacionando em torno de eixos e planos, Kepler contribuiu com o estudo de poliedros descobrindo poliedros estrelados regulares, cuboctaedro, dodecaedro rômbo e triacontraedro rômbo.

Pode ter sido também o primeiro a estudar o antiprisma, sólido obtido a partir da rotação de uma das bases de um prisma, em relação ao seu centro e conectando os vértices com os vértices da outra base, percorrendo diagonalmente as faces.



Tentava ainda utilizar poliedros regulares para preenchimento de espaços e para explicar a organização dos planetas no sistema solar, o que indica seu dedicado trabalho com o tema.

Geometria Analítica - contribuição de Torricelli e Cavalieri

Torricelli, um físico italiano que dedicou uma parte de seus estudos para a matemática, se envolveu nas análises de tangente e cicloides, junto com o Roberval, que estudara a mesma área da matemática na França. Durante sua trajetória, em 1641, notou que uma área infinita, se submetida a uma rotação em torno de um eixo de seu plano, pode, às vezes fornecer um sólido de revolução de volume finito. Por exemplo, a área dada pela hipérbole $xy = k^2$, com a ordenada $x = b$ ($b > 0$) e o eixo x , é infinita, mas o volume do sólido de rotação obtido girando-se a área em torno do eixo x é finita.

Bonaventura Cavalieri foi um matemático italiano, discípulo de Galileu, que criou um método capaz de determinar áreas e volumes de sólido encontrando a relação entre dois sólidos, o princípio de Cavalieri. Este princípio consiste em estabelecer que dois sólidos com a mesma altura têm volumes iguais se as secções planas de mesma altura possuírem a mesma área.

Bibliografia

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas-SP. 2004. Tradução de Higino H. Domingues da publicação original AN INTRODUCTION TO THE HISTORY OF MATHEMATICS.

Apresentação de slides

<https://drive.google.com/file/d/1GXXddosVpq0Gp-gBzyFA5yAHmXjiaV61/view?usp=sharing>