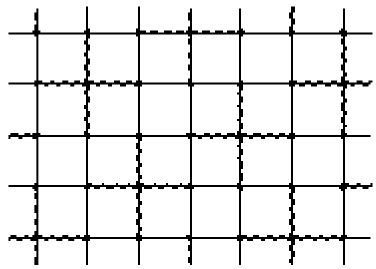

Figure 1: Aglomerados de cinco spins (cruzetas) cobrindo a rede quadrada.

Quinta (última!) série de exercícios
Tópicos de Mecânica Estatística - Transições de Fases - 2018

1- A técnica de grupo de renormalização no espaço real foi usada de forma pioneira por Niemeyer e van Leeuwen para analisar o comportamento crítico do ferromagneto de Ising na rede triangular. A ideia consistia em usar uma "regra da maioria", tirando partido da estrutura de bloquinhos da rede triangular (ver seção 14.6 de Introdução à Física Estatística).

Vamos utilizar um esquema semelhante para analisar o ferromagneto de Ising na rede quadrada, a campo nulo, dado pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j,$$

em que $J > 0$, $\sigma_i = \pm 1$, e a primeira soma é sobre sítios vizinhos mais próximos. A ideia consiste trabalhar com aglomerados básicos de cinco spins (ver a figura 1 abaixo) e realizar um cálculo até primeira ordem apenas. Note que a renormalização resulta em outra rede quadrada, girada e com parâmetro de rede maior. Obtenha as relações de recorrência e o expoente crítico α.

2- O modelo de Potts de $p \geq 2$ estados é dado pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -J \sum_{(i,j)} \delta_{\sigma_i, \sigma_j},$$

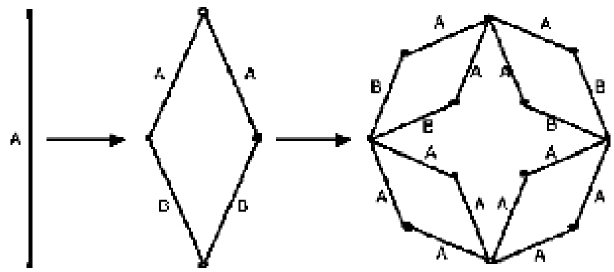

Figure 2: Rede do diamante (a figura ilustra três etapas da construção desse objeto fractal). Não leve em conta as letras A e B, que serviriam para indicar uma distribuição de Fibonacci dos parâmetros de troca.

em que $J > 0$, as variáveis de spin podem assumir p valores, $\sigma_i = 0, 1, 2, ...p-1$, e a soma é sobre sítios vizinhos mais próximos. Obtenha as relações de recorrência para esse modelo definido na rede hierárquica do diamante (ver a figura 2). Qual a temperatura crítica (em função de p)? Faça um gráfico do expoente crítico α em função do número de estados p.

3- Considere um ferromagneto de Ising na presença de um campo externo aleatório. Na versão de campo médio o hamiltoniano desse sistema é dado por

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^{N} H_i \sigma_i,$$

em que $J > 0$, $\sigma_i = \pm 1$ para qualquer sítio i, e $\{H_i\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, associadas à densidade de probabilidade

$$p\left(H_i\right) = \frac{1}{2} \delta\left(H_i - H\right) + \frac{1}{2} \delta\left(H_i + H\right).$$

Embora tenha maior interesse teórico, já foram encontradas diversas realizações experimentais desse tipo de problema.

Obtenha o diagrama de fases desse sistema em termos do campo H e da temperatura T. Utilize as varáveis reduzidas H/J e k_BT/J.

4- O hamiltoniano de Landau-Guinzburg-Wilson de um determinado sistema é dado pela expressão

$$\overline{\mathcal{H}}[\overrightarrow{\sigma}] = -\int d^d\overrightarrow{r}\{\frac{1}{2}r_o[\sigma_1^2(\overrightarrow{r}) + \sigma_2^2(\overrightarrow{r})] + \frac{1}{2}[\left|\overrightarrow{\nabla}\sigma_1(\overrightarrow{r})\right|^2 + \left|\overrightarrow{\nabla}\sigma_2(\overrightarrow{r})\right|^2] +$$

$$+g_1[\sigma_1^4(\overrightarrow{r}) + \sigma_2^4(\overrightarrow{r})] + g_2[\sigma_1(\overrightarrow{r})\sigma_2(\overrightarrow{r})]^2\},$$

onde a variável contínua de spin,

$$\overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{r}) = [\sigma_1(\overrightarrow{r}), \sigma_2(\overrightarrow{r})],$$

é um vetor bidimensional. Quando $g_2 = 2g_1$ este hamiltoniano corresponde ao modelo XY isotrópico clássico.

(a) Supondo $g_1 > 0$ e fazendo $y = g_2/g_1$, utilize a aproximação de campo médio para obter as diferentes fases do sistema em função de r_o e y. Desenhe o diagrama de fases no plano $r_o - y$.

(b) Obtenha relações de recorrência para r_o, g_1 e g_2. Encontre os pontos fixos não triviais em primeira ordem em $\epsilon = 4 - d$. Desenhe o diagrama de fluxos (note que é possível estudar os fluxos no plano $g_1 - g_2$). Discuta a estabilidade de cada ponto fixo.

Nota: este problema é uma ilustração do método de renormalização de Wilson-Fisher, que deveria ser bem conhecido por todos os pesquisadores da área.

Sugestão: escreva inicialmente o hamiltoniano no espaço dos momentos; faça um desenvolvimento em cumulantes até primeira ordem; escreva as relações de recorrência; faça então um desenvolvimento até segunda ordem a fim de corrigir as relações de recorrência para g_1 e g_2.