Física do calor

F.S. Navarra

navarra@if.usp.br

edisciplinas.if.usp.br

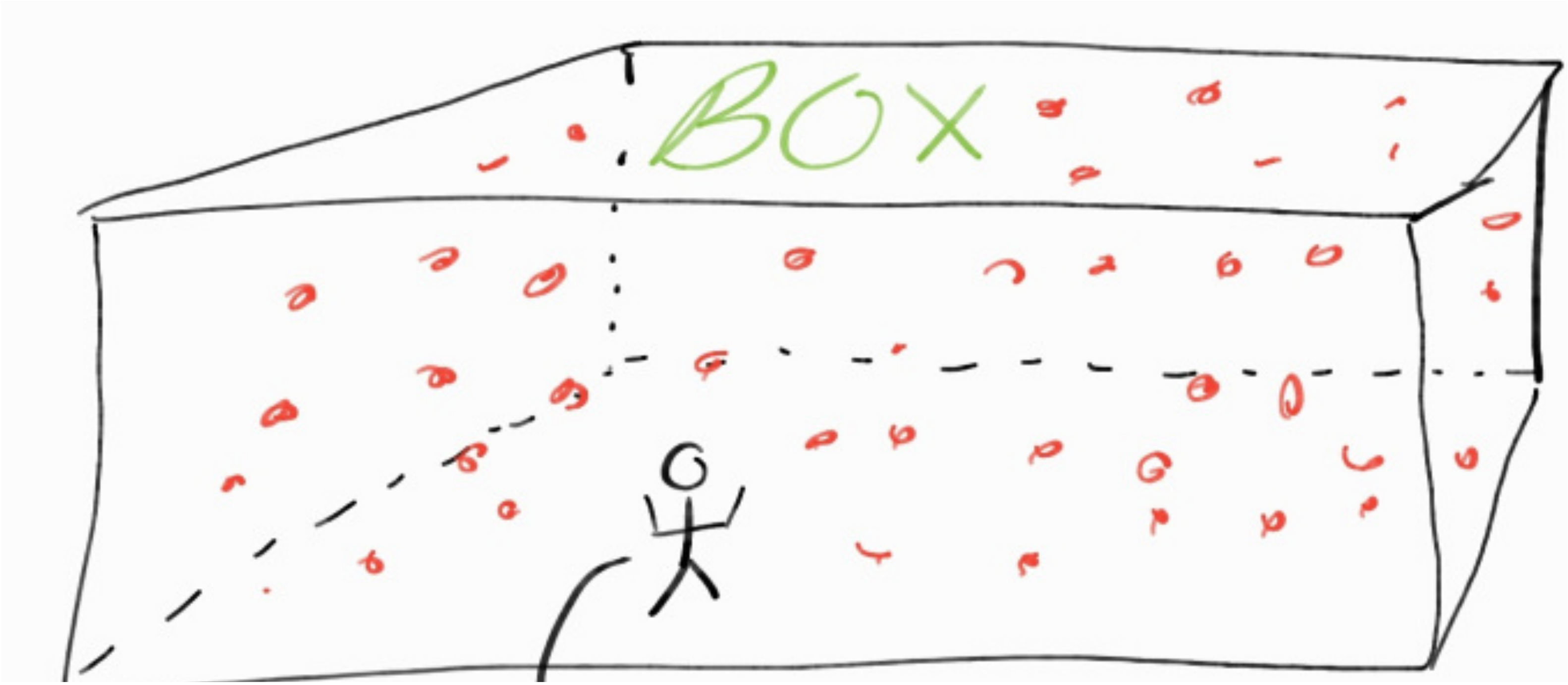
Capítulo 12

Noções de Mecânica Estatística

A distribuição de velocidades de Maxwell

Maxwell

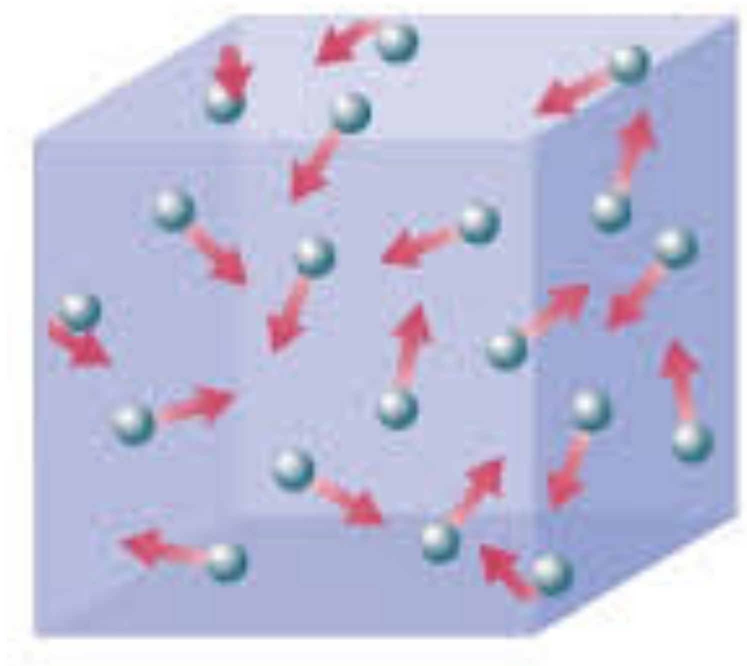
Boltzmann



Aula 1

Sistema em Equilíbrio Térmico

Colisões caóticas entre as moléculas
e com as paredes do recipiente



Distribuição de velocidades dada por:

$$f(v) = C\, v^2\, e^{-mv^2/2kT}$$

C e k são constantes

v é o módulo da velocidade de uma molécula

m é a massa de uma molécula

Coordenadas cartesianas

$$(\vec{v};\vec{v}+d\vec{v}) = (v_x, v_x + dv_x; v_y, v_y + dv_y; v_z v_z + dv_z)$$

$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$$ = fração das moléculas com velocidade entre v e v + dv

$$\int_{\infty}^{\infty} dv_x \int_{\infty}^{\infty} dv_y \int_{\infty}^{\infty} dv_z \, f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = 1$$

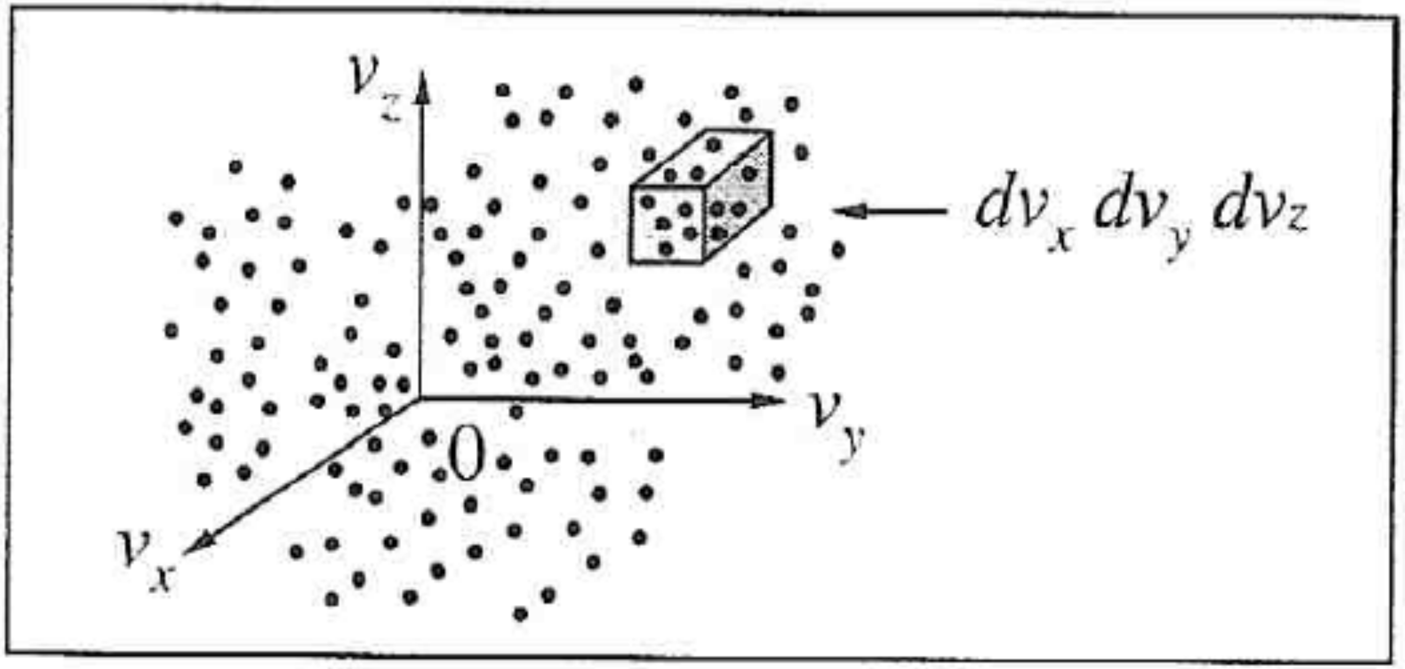
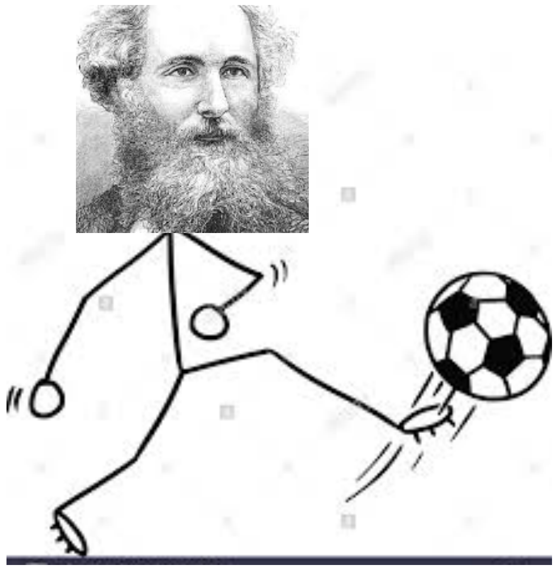


Figura 12.5 — *Espaço de velocidades*

$$\frac{dN_{v_x\, v_y\, v_z}}{N} = f(v_x\, v_y\, v_z)dv_x dv_y dv_z$$

$$dN_{v_x\, v_y\, v_z} = N f(v_x\, v_y\, v_z)dv_x dv_y dv_z$$



Distribuição de Maxwell (1859)

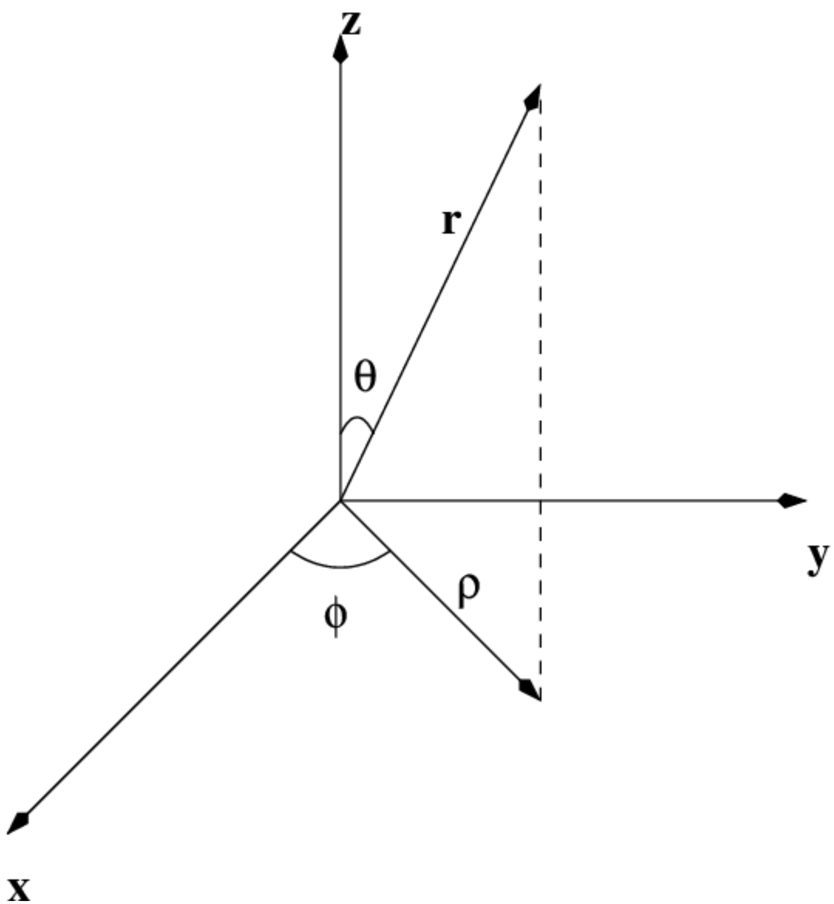
$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} exp\left[-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right]$$

$$\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2} = E$$ = energia cinética da molécula

Distribuição de Boltzmann

$$f(E) = C\,exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

Coordenadas esféricas



$$x = r.\mathrm{sen}\,\theta.\cos\varphi$$

$$y = r.\mathrm{sen}\,\theta.\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$z = r.\cos\theta$$

Coordenadas esféricas

$$(v_x, v_y, v_z) \rightarrow (v, \theta, \phi)$$

$$dv_x\, dv_y\, dv_z \;=\; v^2\, sen\theta\, dv\, d\theta\, d\phi$$

$$\frac{dN_{v_x\, v_y\, v_z}}{N} = f(v_x\, v_y\, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

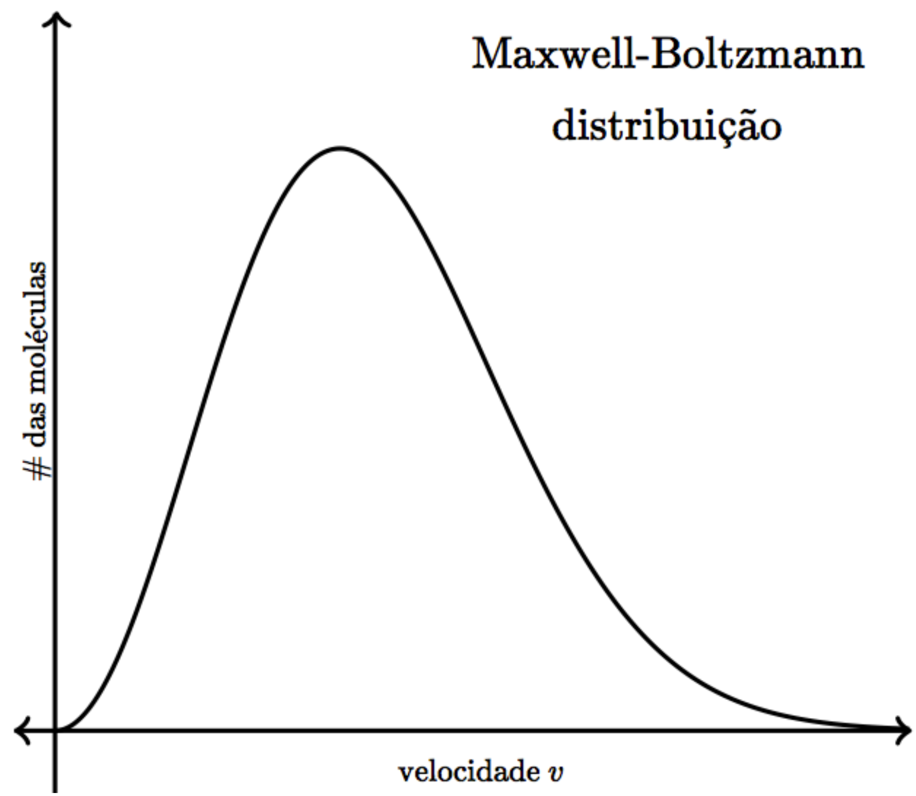
$$\Downarrow$$

$$\frac{dN_{v\,\theta\,\phi}}{N} = f(v\,,\theta\,,\phi)\, v^2\, sen\theta\, dv\, d\theta\, d\phi$$

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)\, 4\,\pi\, v^2\, dv \;=\; F(v)\, dv$$

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right]$$

$$F(v) = 4\,\pi\,\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\,exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]$$



Integração gaussiana

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2\, e^{-ax^2}\, dx = (-1)\,\frac{d}{da}\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx$$

$$= (-1)\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$$

$$\int_0^\infty F(v)\, dv = 1$$

$$v_{qm}^2 \; = < v^2 > = \int_0^\infty F(v)\, v^2\, dv$$

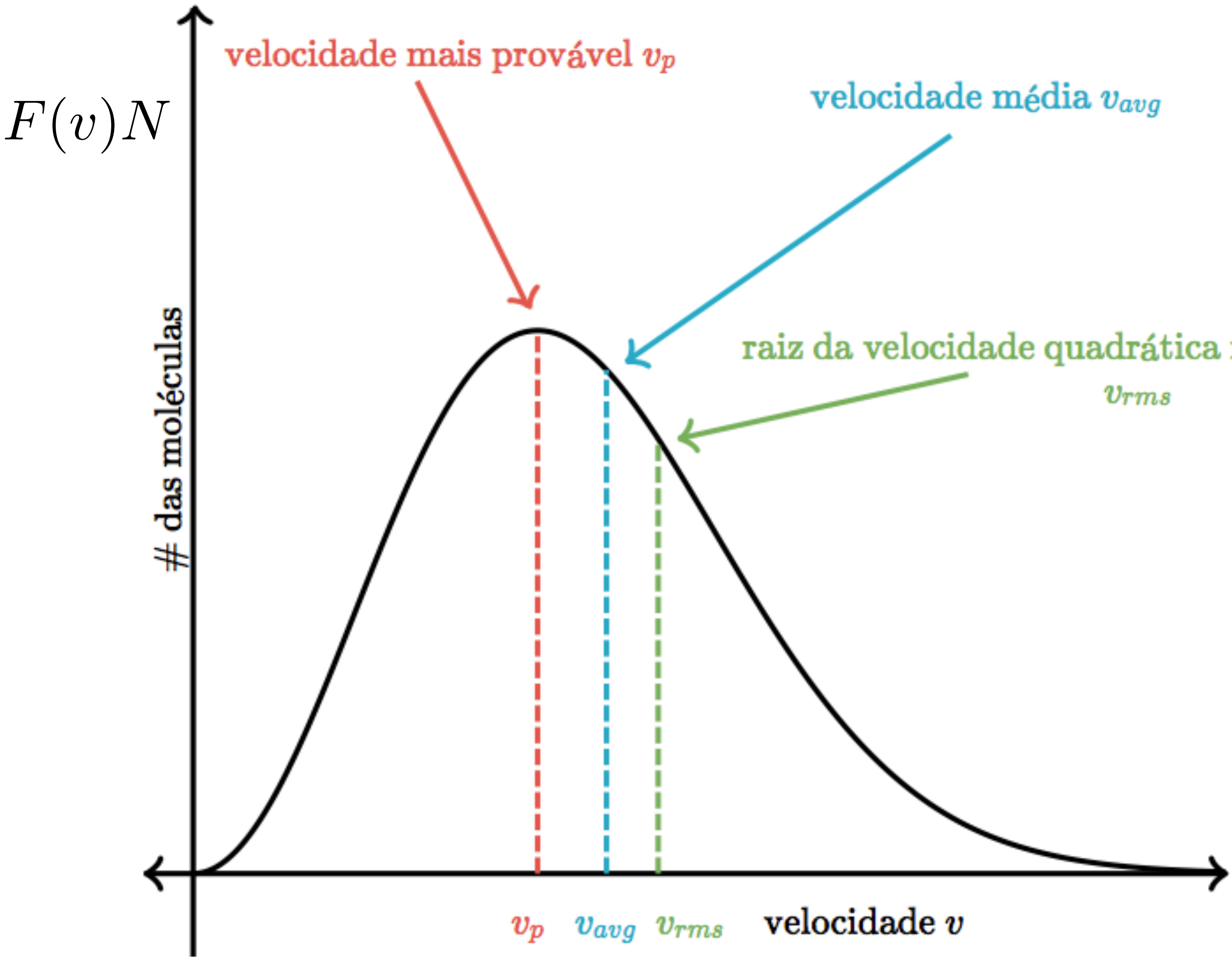
$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$< v > = \int_0^\infty F(v)\, v\, dv$$

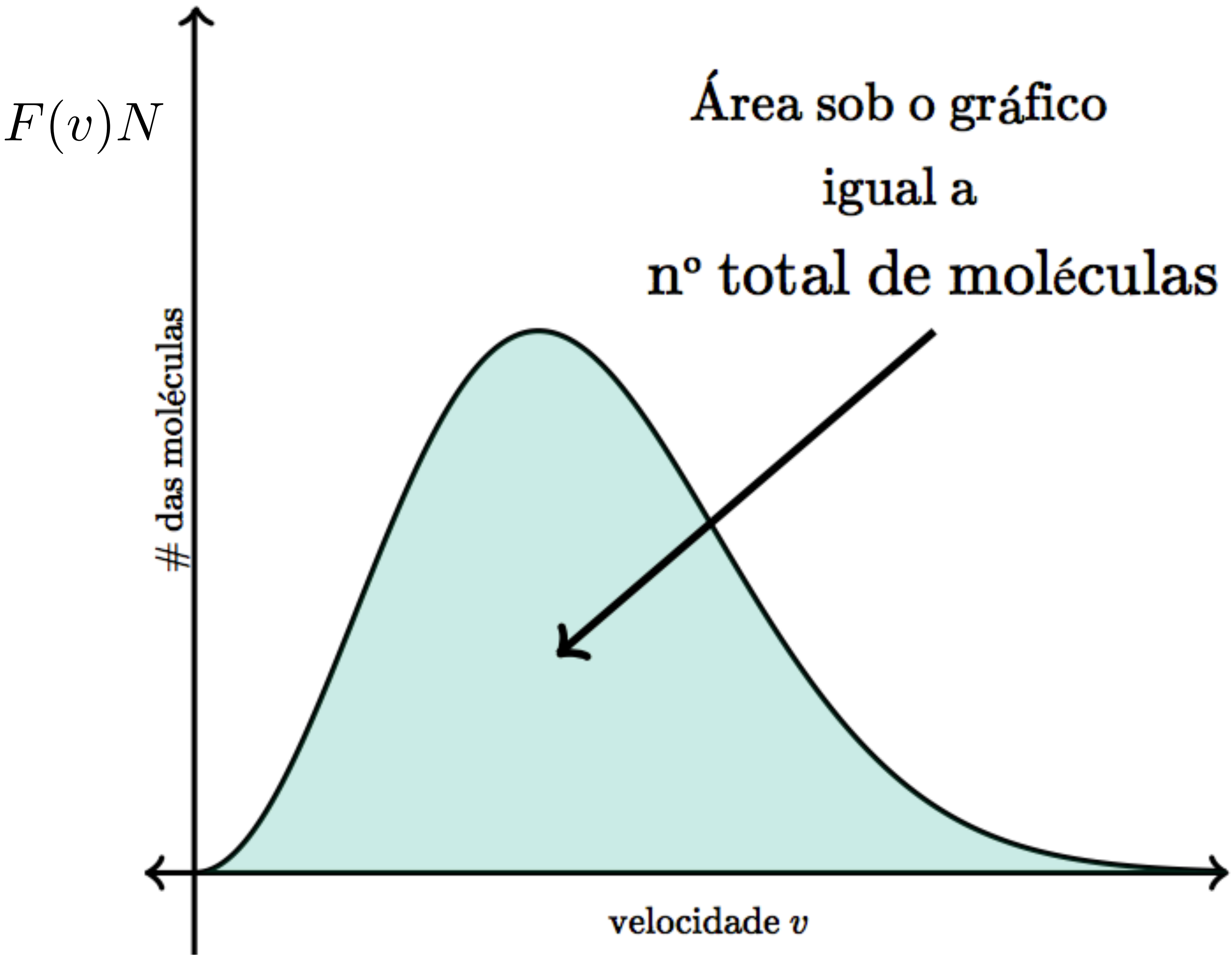
$$< v > = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\frac{d}{dv}[F(v)] = 0$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$



$F(v)N$
das moléculas
velocidade mais provável v_p
velocidade média v_{avg}
raiz da velocidade quadrática média
v_{rms}
v_p
v_{avg}
v_{rms}
velocidade v



$F(v)N$
das moléculas
Área sob o gráfico
igual a
nº total de moléculas
velocidade v

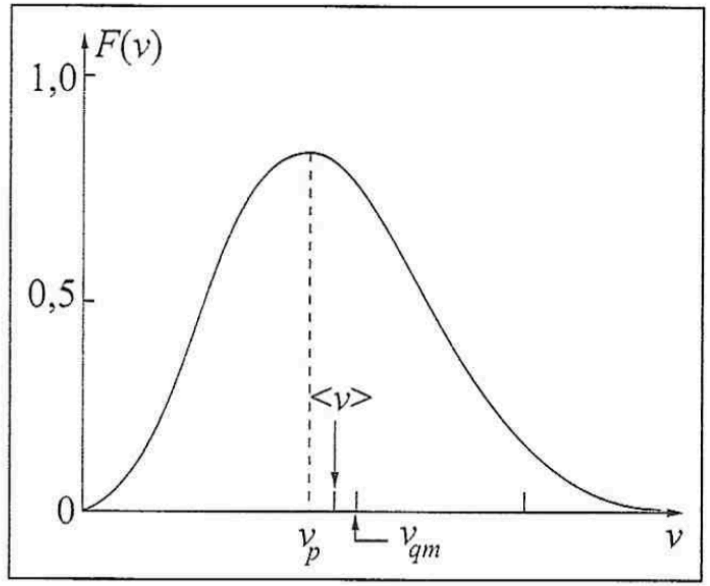


Figura 12.7 — Velocidades características

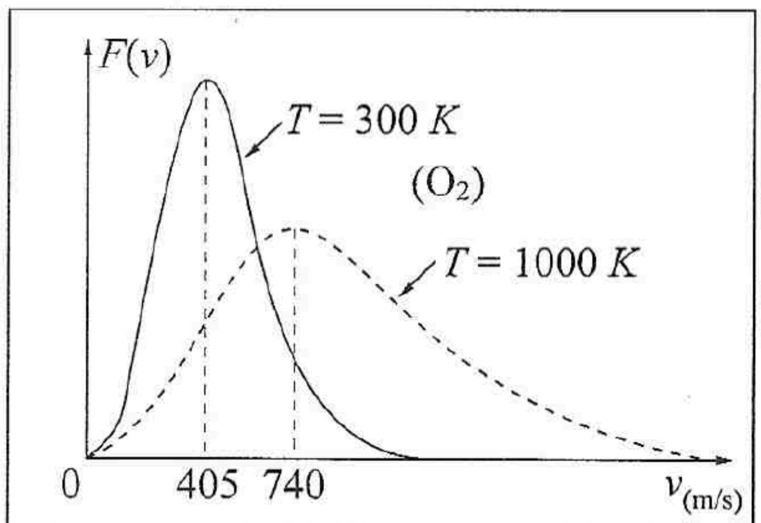
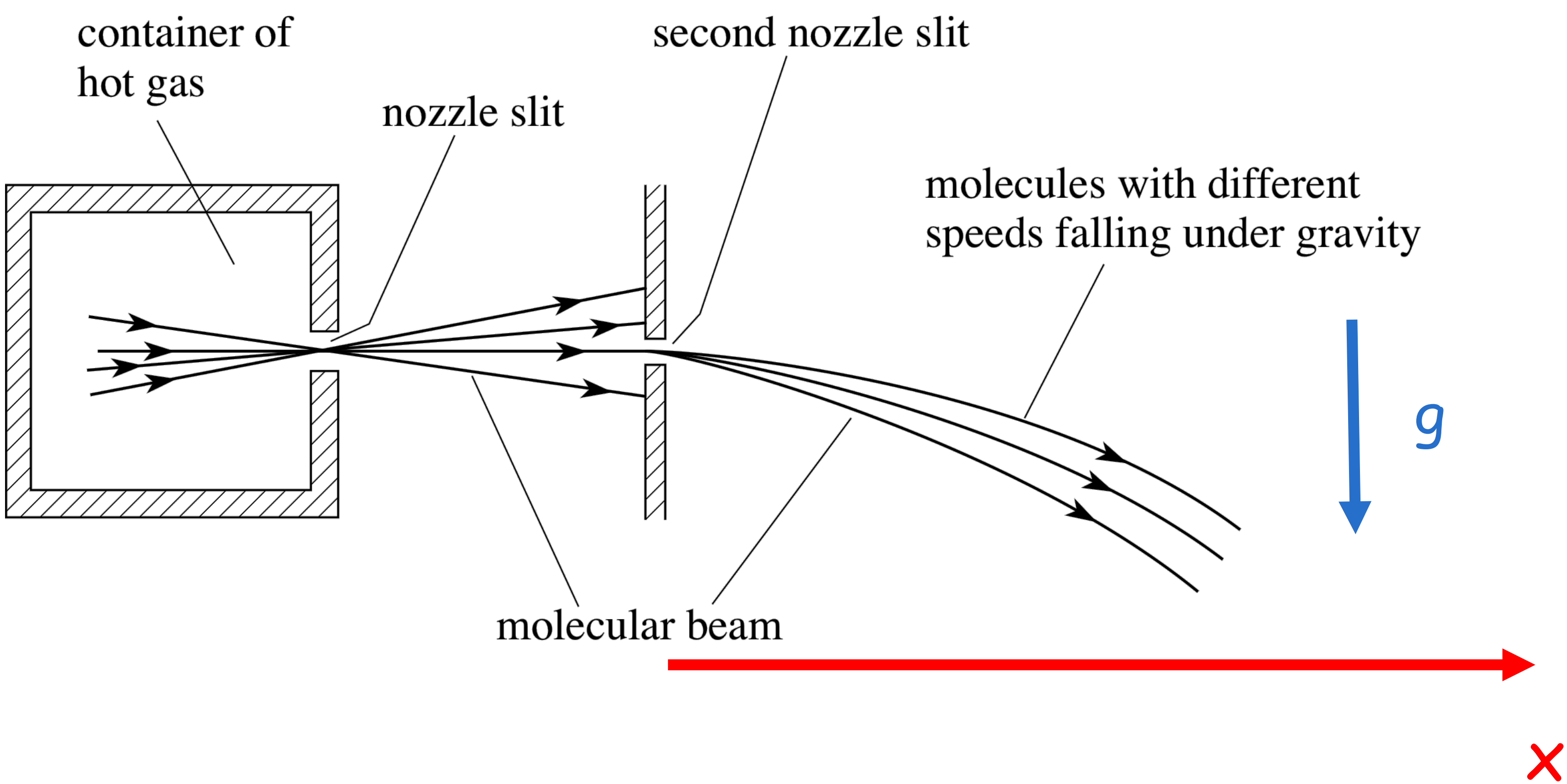


Figura 12.8 — Efeito do aumento da temperatura

Confirmação experimental



Confirmação experimental

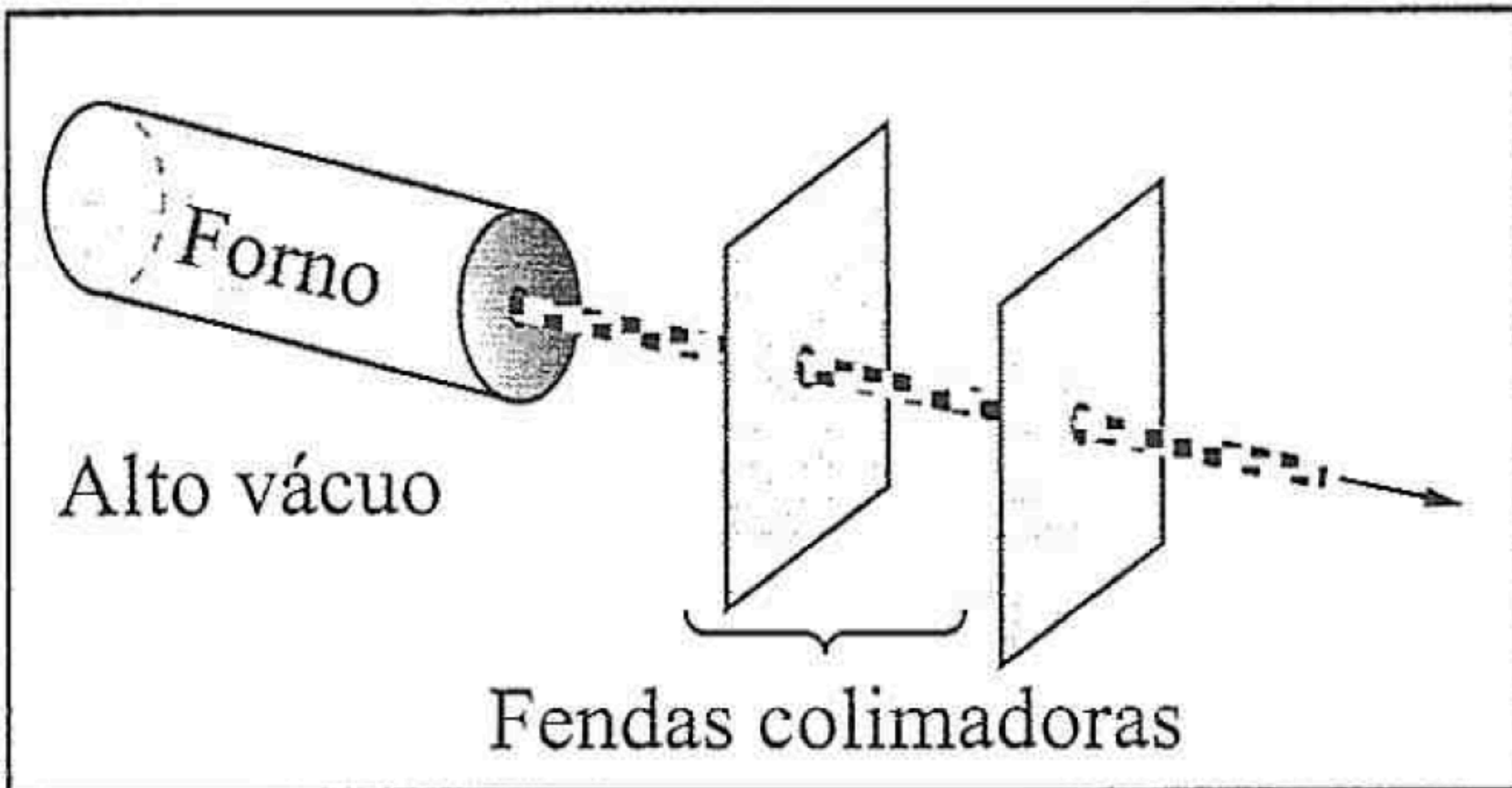
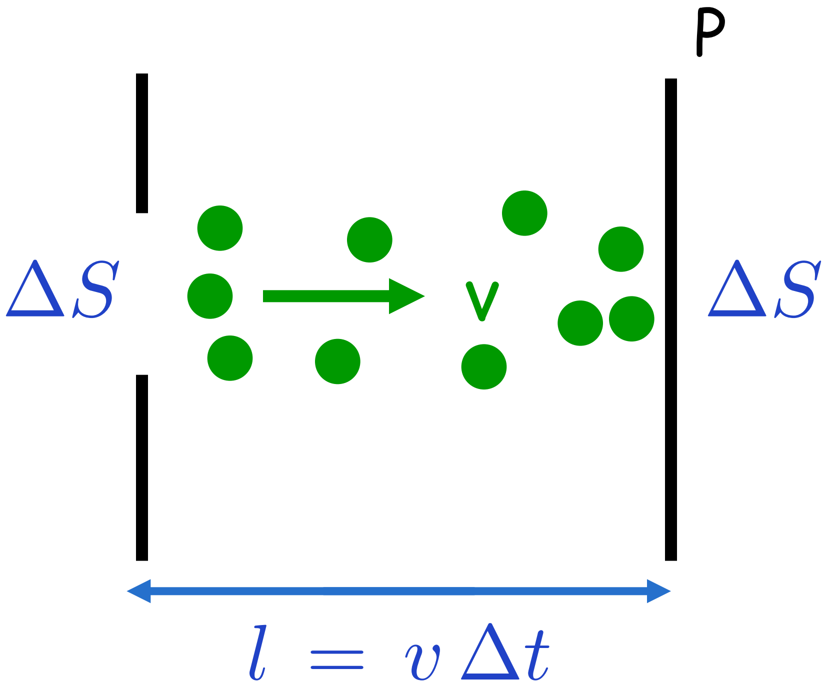


***Figura 12.9** — Produção de um feixe*



volume : $\Delta S\, v\, \Delta t$

número de moléculas por unidade de volume : n

fração de moléculas com v :

$$F(v)\,dv$$

número de moléculas com v que incide sobre Delta S em P no intervalo de tempo Delta t :

$$N = n\,F(v)\,dv\,\Delta S\, v\, \Delta t$$

densidade de corrente j(v) : número de moléculas com velocidade entre v e v +dv , por unidade de área e de tempo :

$$J(v) = \frac{N}{dv\,\Delta S\,\Delta t} = n\,F(v)\,v$$

$$J(v) = 4\,\pi\,n\,\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\,v^3\,exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]$$

J(v) pode ser medido !

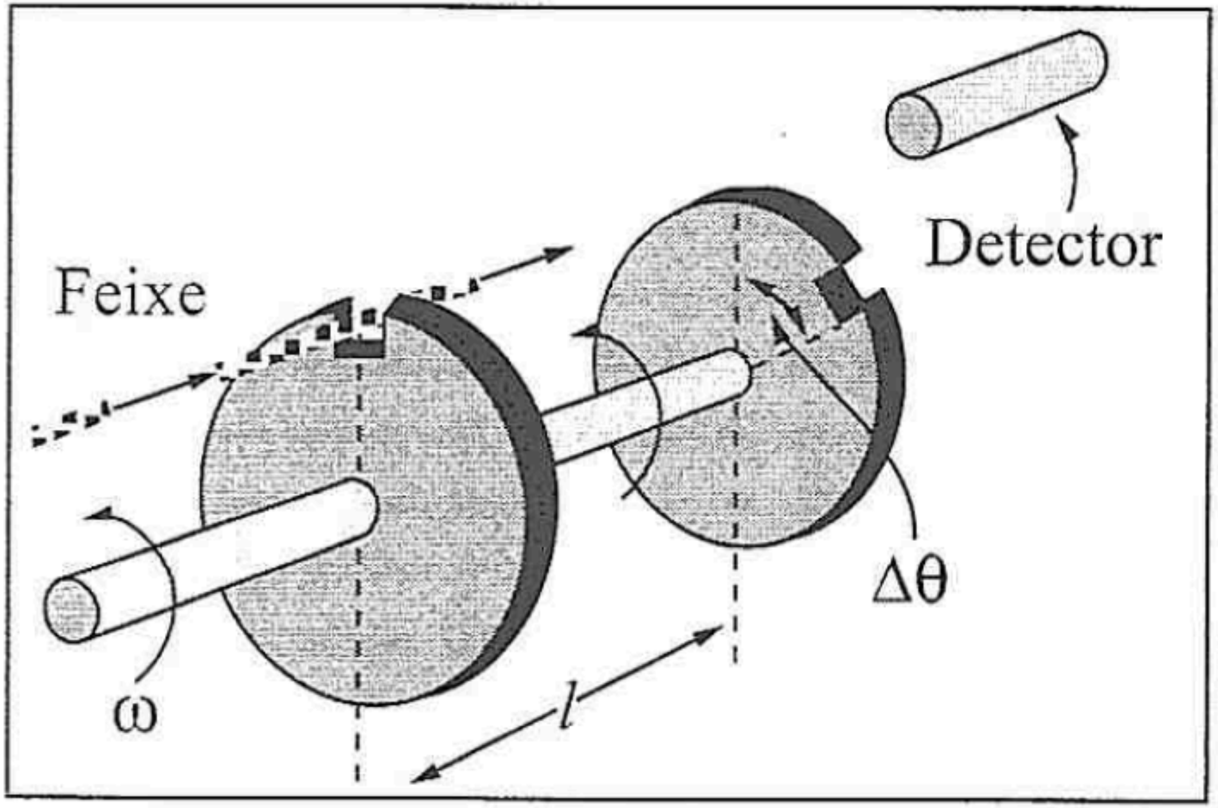
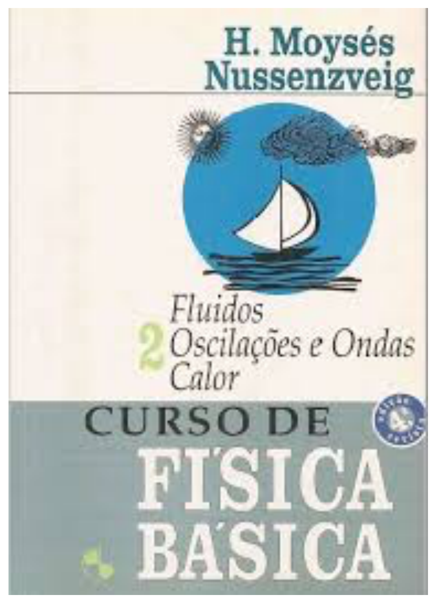


Figura 12.10 — Seletor de velocidades

$$\Delta\theta = \omega\,\Delta t = \omega\, l/v$$

Fim


H. Moysés
Nussenzveig
Fluidos
2 Oscilações e Ondas
Calor
CURSO DE
FÍSICA
BÁSICA

We shall not cease from exploration
And the end of all our exploring
Will be to arrive where we started
And know the place for the first time.

T.S. Eliot, Little Gidding, Four Quartets

$$< v_x^2 > \ = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \ v_x^2 f(v_x, v_y, v_z)$$

Módulo da velocidade: distribuição em coordenadas esféricas

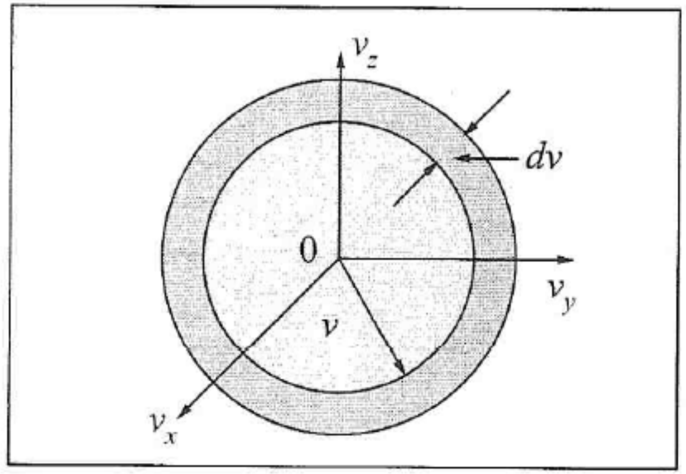


Figura 12.6 — *Distribuição em magnitude*

$$dN(v) = NF(v)dv = Nf(v_x, v_y, v_z)\cdot \overbrace{4\pi v^2 dv}^{\text{volume entre as duas esferas}} = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2 dv$$

$$\boxed{F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)}$$

(f) Distribuição de Boltzmann

$$F(\underbrace{x, y, z,}_{\mathbf{r}} \underbrace{v_x, v_y, v_z}_{\mathbf{v}})\, dx\, dy\, dz\, dv_x dv_y dv_z \tag{12.2.46}$$

onde, pelas (12.2.11) e (12.2.33),

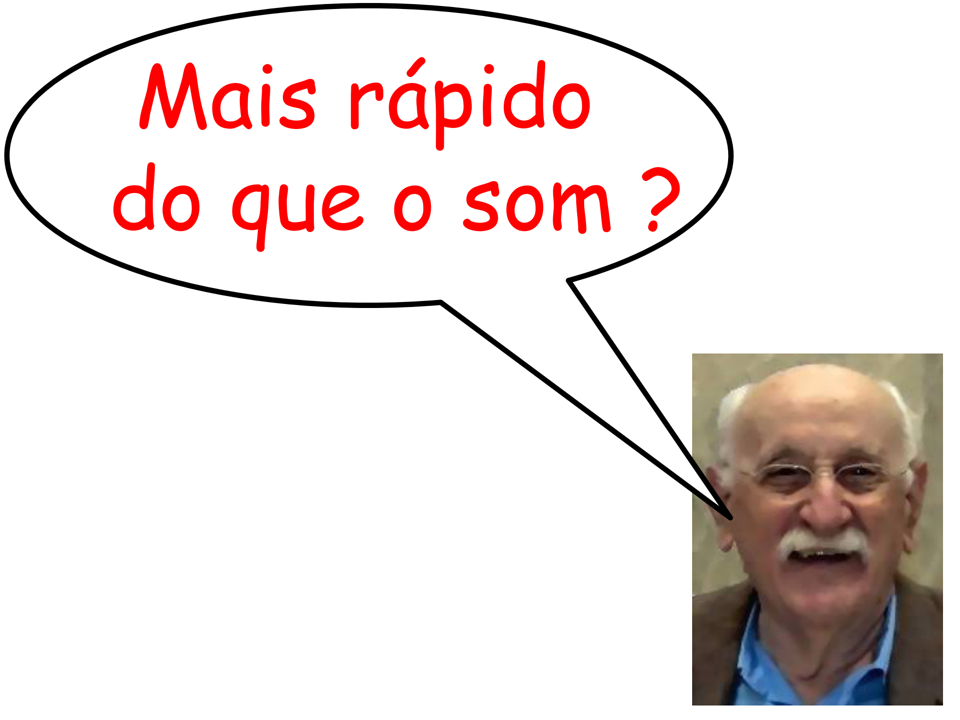
$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= C \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}\right) \\ &= C \exp\left[-\frac{1}{kT}\left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + mgz\right)\right] \end{aligned} \tag{12.2.47}$$

onde C é um fator de normalização.

Mas

$$E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + mgz \tag{12.2.48}$$

$$\boxed{F(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = C \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)}$$


Mais rápido
do que o som ?