Exercícios para Entrega 4

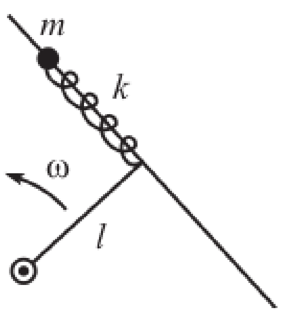
Mecânica I (2018): Ana Regina Blak e Gabriel Lefundes

Entrega: 22/11/2018 (quinta-feira)

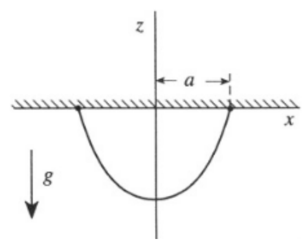
Aviso: Leia o artigo que está no Moodle sobre como escrever soluções para listas de exercícios antes de começar a lista e entregue uma folha extra com as suas dúvidas e dificuldades sobre os problemas, coisas mais gerais do assunto, matemática, etc. A correção desta lista será mais rigorosa que a anterior: explique bem cada passo fizer! O que não souber explicar bem, pergunte na monitoria, discuta com colegas ou fale sobre na folha extra.

Problema 1. (3.0)
Considere a situação da figura 1a: um T rígido composto por uma barra muito grande presa a uma barra de comprimento l presa a um ponto na origem. O T roda em um plano horizontal com velocidade angular constante ω. Uma massa m se move na barra muito grande sem deslizar e está conectada ao ponto de interseção com a outra barra por uma mola de constante elástica k e comprimento relaxado 0. Ache $r(t)$, onde r é a posição da massa com relação ao ponto de interseção. Há um valor especial de ω; qual é, e por que é especial? Desconsiderando a força da gravidade, resolva este problema:

- Analisando a situação do referencial em que o T está em repouso utilizando apenas mecânica Newtoniana e o seu conhecimento sobre referenciais não inerciais.
- Utilizando o formalismo Lagrangiano.



(a) Vista superior



(b) Esquema para o problema 2

Figura 1

Problema 2. (3.0)
Vamos resolver um problema bastante clássico (veja a figura 1b): considerando a força gravitacional, qual é a forma de uma corda de massa m e comprimento l presa pelas extremidades a dois pontos na mesma altura separados de uma distância $2a$?

- Dada uma curva $z(x)$ descrevendo a forma da corda, escreva as expressões para o comprimento da corda e energia potencial desta.
- Escreva as equações de Euler-Lagrange para a curva $z(x)$ que minimiza a energia potencial e tem comprimento l.
- Mostre que a solução é da forma $z(x) = A\cosh(x/A) + B$. Esta curva é conhecida como *Catenária*.

Problema 3. (3.0)
Uma partícula de massa m, sob ação da gravidade, está confinada a se mover no interior de um cone invertido, de ângulo α e com seu eixo na vertical. Utilizando coordenadas esféricas, determine:

- A Lagrangiana do sistema e os momentos generalizados.

- As equações de movimento para $r(t)$ e $\phi(t)$.
- Use o fato de ϕ ser coordenada cíclica para escrever uma equação para $r(t)$ que não depende de ϕ e ache o raio da trajetória circular.
- Escreva a energia da partícula, identifique o potencial efetivo e determine a frequência de pequenas oscilações em torno da trajetória circular.

Problema 4. (1.0)
Em geral não é tão simples estudar uma força não conservativa utilizado o formalismo Lagrangiano. Nos casos nos quais isto é possível, a Lagrangiana certamente depende explicitamente do tempo (e certamente não é escrita como $T - V$, até porque forças não conservativas não têm potencial associado). Um exemplo simples que podemos tratar é:

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right)$$

Use as equações de Euler-Lagrange para determinar a equação de movimento deste sistema. Você já encontrou essa equação antes? Se sim (certamente sim), onde?

Problema 5. Extra. Não vale nota!
Aviso: não é necessário nenhum conhecimento de Eletromagnetismo ou Relatividade para responder a essa questão.
O campo eletromagnético pode ser descrito pelo potencial escalar $\phi(x, y, z, t)$ e pelo potencial vetor $\mathbf{A}(x, y, z, t)$. A partir deles obtemos os campos elétricos e magnéticos por meio das equações

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Denotando $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, a Lagrangiana de uma partícula relativística se movendo na presença do campo eletromagnético é

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - q[\phi(\mathbf{r}) - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]$$

Note que as equações de Euler-Lagrange também valem para esta Lagrangiana. $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$. Assumindo q constante:

- Mostre que na presença do potencial vetor, o momento generalizado associado às coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$ se tornam

  $$\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

  Isto é, na presença de um potencial vetor, o momento generalizado é o momento relativístico "normal"mais um termo dependente de $\mathbf{A}$.

- Mostre que a energia do sistema é

  $$E = \mathbf{v}\cdot\mathbf{P} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\phi$$

  Isto é, a energia cinética relativística mais o potencial eletrostático.

- Use o fato que uma derivada temporal total somada na Lagrangiana não altera as equações do movimento para mostrar que a seguinte transformação (de Gauge) não altera as equações do movimento:

  $$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$$

  onde $\Lambda = \Lambda(x, y, z, t)$. Uma Lagrangiana satisfazendo esta propriedade é dita invariante de Gauge.

- (Desafio) Mostre que as equações do movimento são dadas pela força de Lorentz:

  $$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

  Super-dica: note que $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ é uma derivada total e que $\mathbf{A}$ depende de $\mathbf{r(t)}$.