- Quadro da ANVA para um ensaio fatorial com dois fatores A (I), B (J) e K repetições.

Fonte de Variação	**G.L.**	**S.Q.**	**QM**	**F**
A	I-1	S.Q.(A)	S.Q. (A) / (I-1)	Q.M. (A) / QM.Res.
B	J-1	S.Q.(B)	S.Q. (B) / (J-1)	Q.M. (B) / QM.Res.
A × B	(I-1) (J-1)	S.Q (A × B)	S.Q. (A × B) / (I-1) (J-1)	Q.M. (A × B) / M.Res.
Resíduo	I J (K-1)	S.Q. Res.	S.Q. Res. / IJ (K-1)	---------
Total	IJK – 1	S.Q. Total	-	-

Se tivermos três fatores A (I), B(J), C(L) e K repetições o quadro da ANVA fica:

Fonte de Variação	**G.L.**	**S.Q.**	**QM**	**F**
A	I-1	S.Q. (A)	S.Q. (A) / (I-1)	Q.M. (A) / QM.Res.
B	J-1	S.Q.(B)	S.Q. (B) / (J-1)	Q.M. (B) / QM.Res.
C	L-1	S.Q.(C)	S.Q. (C) / (L-1)	Q.M. (C) / QM.Res.
A × B	(I-1) (J-1)	S.Q. (A × B)	S.Q. (A × B) / (I-1) (J-1)	Q.M.(A × B) /QM.Res.
A × C	(I-1) (L-1)	S.Q. (A × C)	S.Q. (A × C) / (I-1) (L-1)	Q.M.(A × C) /QM.Res.
B × C	(J-1) (L-1)	S.Q. (B × C)	S.Q. (B × C) / (J-1) (L-1)	Q.M.(B × C) /QM.Res.
A × B × C	(I-1) (J-1)(L-1)	S.Q. (A × B × C)	S.Q.(A×B×C) / (I-1)(J-1)(K-1)	Q.M.(A×B×C)/QM.Res
Resíduo		S.Q. Res.	S.Q. Res. / IJ (K-1)	---------
Total	IJLK – 1	S.Q. Total	-	-

O modelo fica: $y_{ijlk} = \mu + a_i + b_j + c_l + (ab)_{ij} + (ac)_{il} + (bc)_{jl} + (abc)_{ijl} + e_{ijlk}$
com i=1,2,...,I; j=1,2,...,J, l=1,2,...,L; k=1,2,...,K.

- Exemplo – Um ensaio foi executado para determinar os efeitos da irrigação (com e sem) e da adubação (química e orgânica) sobre a produção total de matéria seca (kg/ha) de capim elefante (*Pennisetum purpureum*: Schum.) cv "Cameroon", em um D.I.A com 4 repetições.

		Repetições				
Irrigação	Adubação	1	2	3	4	Totais
Com	Orgânica	32,70	30,50	31,55	28,00	122,75
	Química	28,40	28,50	25,86	29,68	112,44
Sem	Orgânica	18,05	18,10	20,72	19,80	76,67
	Química	18,13	21,00	19,50	20,50	79,13
						390,99

$$\begin{cases} I = 2 \\ J = 2 \\ K = 4 \end{cases}$$

$$C = \frac{G^2}{IJK} = \frac{(390{,}99)^2}{16} = 9.554{,}5737\left({}^{Kg}/_{ha}\right)^2$$

$$\text{S.Q. TOTAL} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} y_{ijk}^2 - C = 9.992{,}3623 - 9.554{,}5737$$
$$= 437{,}7886$$

S.Q. TRAT. = $\frac{1}{K}\sum_{i}\sum_{j} T_{ij}^2 - C = \frac{1}{4}\left(122{,}75^2 + ... + 79{,}13^2\right) - C$
= 9962,5405 – 9.554,5737
= 407,9667

Quadro auxiliar para o cálculo das variações de A, B e (A × B)

(4)	**Com Irrig.**	**Sem Irrig.**	**Total**
Adub. Orgânica	122,75	76,67	199,42
Adub. Química	112,44	79,13	191,57
	235,19	155,8	390,99

S.Q. IRRIG. = $\frac{1}{8}\left(235{,}19^2 + 155{,}8^2\right) - C$

= 9.948,4970 – 9.554,5737
= 393,9233

S.Q. ADUB. = $\frac{1}{8}\left(199{,}42^2 + 191{,}57^2\right) - C$
= 9.558,4251 – 9.554,5737
= 3,8514

S.Q. (Irrig. × Adub.) = $\overbrace{\frac{1}{4}\left(122{,}75^2 + \ldots + 79{,}13^2\right) - \mathrm{C}}^{\text{S.Q.Conjunta (A,B)}}$ - S.Q. Irrig. – S.Q. Adub.
= 9.962,5404 – 9.554,5737 – 393,9233 – 3,8514
= **407,9667** – 393,9233 – 3,8514
= 10,1920

OBS: No caso de dois fatores, a S.Q. Conjunta (A,B) é igual a S.Q. Tratamentos!

S.Q. Resíduo = S.Q. Total – S.Q. Irrig – S.Q. Adub. – S.Q. (Adub. x Irrig.)
= 437,7886 – 393,9233 – 3,8514 –10,1920
= 29,8219

Quadro da Anva

Fonte de Variação	**G.L.**	**S.Q.**	**Q.M.**	**F**	**Valor-p**
Irrigação	1	393,9233	393,9233	$158{,}51^{**}$	0,0001
Adubação	1	3,8514	3,8514	$1{,}55^{ns}$	0,2369
(Irrig. x Adub.)	1	10,1920	10,1920	$4{,}10^{ns}$	0,0657
Resíduo	12	29,8219	2,4851	-	-
Total	15	437,7886	-	-	-

$$F_{(1,12)_{0,05}} = 4{,}75$$

$$C.V. = \frac{\sqrt{Q.M\,Res.}}{\hat{\mu}}100 = \frac{\sqrt{2{,}4851}}{24{,}436875}100 = 6{,}45\%$$

$$F_{(1,12)_{0,01}} = 9{,}33$$

Interação não significativa, indicando existir um paralelismo ou independência entre os efeitos dos fatores. Então as conclusões para efeito principal de IRRIGAÇÃO e ADUBAÇÃO do quadro acima são válidas.

Caso de interação significativa: Desdobramento da interação:

a) Estudar o comportamento das IRRIGAÇÕES dentro de cada nível de ADUBAÇÃO.

b) Estudar o comportamento das ADUBAÇÕES dentro de cada nível de IRRIGAÇÃO.

a) S.Q. Irrig. d. $A_{org.} = \frac{1}{4}\left(122{,}75^2 + 76{,}67^2\right) - \frac{(199{,}42)^2}{8}$
= 5.236,46285-4.971,04205
= 265,4208

S.Q. Irrig. d. $A_{química} = \frac{1}{4}\left(112{,}44^2 + 79{,}13^2\right) - \frac{(191{,}57)^2}{8}$
= 4.726,0776-4.587,3831
= 138,6945

Verificação: S.Q. Irrig. d. $A_{org.}$ + S.Q. Irrig. d. $A_{química}$ = S.Q. Irrig. + S.Q. (Irrig. × Adubo).

Causa de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Adubo	1	3,8514	3,8514	$1{,}55^{ns}$
Irrig. d. $A_{org.}$	1	265,4208	265,4208	106,8048**
Irrig. d. $A_{química}$	1	138,6945	138,6945	55,8104**
Resíduo	12	29,8219	2,4851	-------

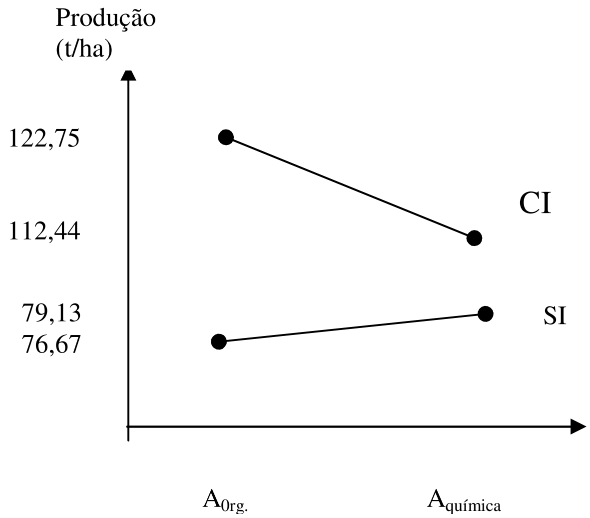
Note que são efeitos simples!

Conclusões:

1. Quando se utiliza Adubo Orgânico, há diferença significativa na produção de M.S. de capim elefante, sendo melhor com Irrigação.

2. Quando se utiliza Adubo Químico, há diferença significativa na produção de M.S. de capim elefante, sendo melhor com Irrigação.

Gráfico:



Médias:

a) IRRIGAÇÃO dentro adubo orgânico

$$\overline{CIAO} = \frac{122{,}75}{4} = 30{,}6875\ {}^{t}\!/_{ha}\ \text{a}$$

$$\overline{SIAO} = \frac{76{,}67}{4} = 19{,}1675\ {}^{t}\!/_{ha}\ \text{b}$$

$$\Delta = q_{(2,12,0,05)}\sqrt{\frac{\text{Qm Res.}}{\text{Rep.}}} = 3{,}08\sqrt{\frac{2{,}4851}{4}} = 2{,}4276$$

Diferença nas médias = (30,6875-19,1675)=11,52

b) IRRIGAÇÃO dentro adubo químico

$$\overline{CIAQ} = 112{,}44/4 = 28{,}11\ {}^{t}\!/_{ha}\ \text{a}$$

$$\overline{SIAQ} = 79{,}13/4 = 19{,}7825\ {}^{t}\!/_{ha}\ \text{b}$$

$$\Delta = 2{,}4276$$

Diferença nas médias= 8,3275

b) S.Q. Adub. d. C / Irrig. $= \frac{1}{4}\left(122{,}75^2 + 112{,}44^2\right) - \frac{(235{,}19)^2}{8}$

$= 6.927,5790 - 6.914,2920$
$= 13,2870$

$$\text{S.Q. Adub. d. S / Irrig.} = \frac{1}{4}\left(76,67^2 + 79,13^2\right) - \frac{(155,8)^2}{8}$$
$= 3.034,96145 - 3.034,205$
$= 0,75645$

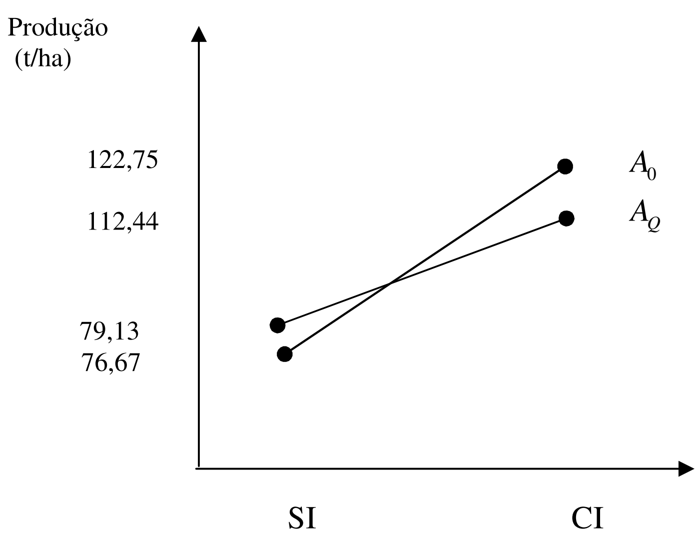
Verificação: S.Q. Adub. d. C / Irrig. + S.Q. Adub. d. S / Irrig. = S.Q. Adubo + S.Q. (Adubo x Irrig.).

Causa de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Irrigação	1	393,9233	393,9233	$158,51^{**}$
Adubo d. C / Irrig.	1	13,2870	13,2870	$5,3466^{*}$
Adubo d. S / Irrig.	1	0,75645	0,75645	$0,3044^{ns}$
Resíduo	12	29,8219	2,4851	-------

Conclusões:

1. Quando se utiliza Irrigação, há diferença significativa na produção de M.S. de capim elefante, sendo melhor com Adubo Orgânico.

2. Quando não se utiliza Irrigação, não há diferença na produção de M.S. de capim elefante, tanto com adubo orgânico como adubo químico.



Médias:

a) <u>ADUBO dentro Com Irrigação</u>

$\overline{AOCI} = 122,75/4 = 30,6875 \ ^{t}/_{ha}$ a

$\overline{\text{AQCI}} = 112{,}44/4 = 28{,}11\ {}^{t}\!/_{ha}$ b

$\Delta = 2{,}4276$

Diferença nas médias= (30,6875 – 28,11) = 2,5775

b) <u>ADUBO dentro Sem Irrigação</u>

$\overline{\text{AOSI}}$ = 76,67/4 = 19,1675 a

$\overline{\text{AQSI}}$ = 79,13/4 = 19,7825 a

$\Delta = 2{,}4276$

Diferença nas médias = (19,7825 – 19,1675) = 0,615

QUADRO RESUMO DAS MÉDIAS

	IRRIGAÇÃO	
ADUBO	Com Irrigação	Sem Irrigação
Orgânico	30,68 a A	19,16 a B
Químico	28,11 b A	19,78 a B

a) Para Adubo, letras minúsculas iguais nas colunas indicam que as médias não diferem entre si, pelo teste de TUKEY (α=0,05) (ou teste F).

b) Para Irrigação, letras maiúsculas iguais nas linhas indicam que as médias não diferem entre si, pelo teste TUKEY $(\alpha = 0{,}05)$ (ou teste F).

Exercício: Barbin (2003) apresenta os dados de diâmetro médio (cm), aos 5 anos de idade, das plantas úteis de cada parcela, de um ensaio fatorial 4 ×2, no DAB, com três repetições, conduzido por H.A. Mello e outros em Mogi-Guaçu.

		Bloco			
Espécies	Espaçamento	I	II	III	Totais
E. saligna	(3,0 ×1,5 m)	10,69	10,05	10,31	31,05
E. saligna	(3,0 ×2,0 m)	12,95	10,99	12,37	36,31
E. grandis	(3,0 ×1,5 m)	9,68	10,58	10,44	30,70
E. grandis	(3,0 ×2,0 m)	11,78	12,28	12,82	36,88
E. alba	(3,0 ×1,5 m)	9,59	9,78	10,17	29,54
E. alba	(3,0 ×2,0 m)	11,46	10,89	10,97	33,32
E. propinqua	(3,0 ×1,5 m)	9,40	7,50	8,66	25,56
E. propinqua	(3,0 ×2,0 m)	10,02	10,45	10,71	31,18
Totais		85,57	82,52	86,45	254,54

Pede-se:

1) Verificar graficamente se existe interação entre Espécies × Espaçamento.

2) Fazer a análise da variância com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamento no esquema fatorial e tirar conclusões sobre o teste F.

3) Fazer o desdobramento do número de g.l. de Espécies mais o da interação Espécies × Espaçamento e tirar conclusões.

3) Fazer o desdobramento do número de g.l. de Espaçamentos mais o da interação Espécies × Espaçamento e tirar conclusões.

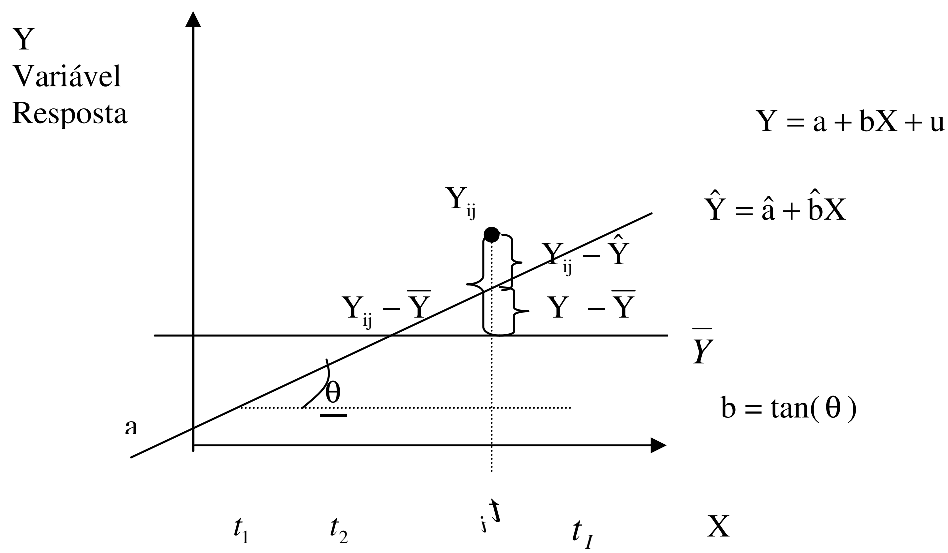
4) Aplicar o teste de Tukey, ao nível de 0,05 de probabilidade, para comparação das médias duas a duas (Obs: Se a interação não foi significativa, para as médias marginais (fator principal); se a interação foi significativa, para as médias de um fator dentro do outro).

ANÁLISE DE REGRESSÃO: ***Tratamentos Quantitativos***

Ensaios que objetivam comparar tratamentos que diferem quantitativamente entre si.

Ex: Um zootecnista pode fazer um ensaio para comparar o efeito de diferentes dosagens de um antibiótico, vermífugo, ração, sobre a produção de animais.

	TRATAMENTOS (Níveis Quantitativos)		
Repetição	t_1	t_2	t_I
1	Y_{11}	Y_{21}	Y_{I1}
2	Y_{12}	Y_{22}	Y_{I2}
⋮	⋮	⋮	⋮
J	Y_{1J}	Y_{2J}	Y_{IJ}



MATRICIALMENTE $\mathbf{y} = \mathrm{X}\ \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$
Modelo Matricial de Regressão

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1J} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2J} \\ \cdots \\ y_{I1} \\ y_{I2} \\ \vdots \\ y_{IJ} \end{bmatrix} \qquad {}_{\mathrm{IJ}}\mathbf{X}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_2 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & t_I \\ 1 & t_I \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_I \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1J} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2J} \\ \cdots \\ u_{I1} \\ u_{I2} \\ \vdots \\ u_{IJ} \end{bmatrix}$$

- PRESSUPOSIÇÕES

a) A variável dependente (Y_{ij}) é função linear da variável independente $(X_{ij}) = t_i$, i =1, 2, …, I.

b) Os valores das variáveis independentes são fixos (t_i) .

c) E $(u_{ij}) = 0$ → E ($\mathbf{u}$) = ϕ

d) Os erros são homocedásticos, e a Var (u_{ij}) = σ^2

e) Os erros são não-correlacionados entre si, $\mathrm{Corr}(\mathrm{u}_{\mathrm{ij}}, \mathrm{u}_{\mathrm{i'j'}}) = 0$

f) O erro tem distribuição normal $\mathbf{u} \sim N(\phi, I\sigma^2)$

- Estimativa dos parâmetros no vetor ($\boldsymbol{\beta}$) de acordo com o método dos mínimos quadrados (valores mais prováveis).
Sejam $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ os vetores das estimativas dos parâmetros e dos desvios.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ \hat{u}_{IJ} \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\ \hat{\beta} + \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{u}}$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{11} \\ \hat{y}_{12} \\ \vdots \\ \hat{y}_{IJ} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\ \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$$

A soma dos quadrados dos desvios é dada por

$$\mathbf{Z} = \mathbf{u}'\mathbf{u} = \left(\mathbf{Y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\right)\ \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

As matrizes $\mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ são iguais, pois uma é a transposta da outra e cada uma tem apenas um elemento. Então

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$
(1)

A função Z apresenta ponto de mínimo para os valores de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ que tornem sua diferencial identicamente nula, isto é,

$$dZ = -2\left(\boldsymbol{d}\hat{\beta}'\right)\boldsymbol{X}'\mathbf{y} + \left(\boldsymbol{d}\hat{\beta}'\right)\ \left(X'X\right)\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\left(d\hat{\beta}\right) \equiv 0$$

Como $(d\,\hat{\beta}')\ X'X\hat{\beta}\ =\ \hat{\beta}'X'X(d\hat{\beta})$, por serem matrizes com apenas um elemento e uma ser transposta da outra, segues-se que:

$$-2\left(\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\right)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\left(\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\right)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \equiv 0 \qquad \text{ou ;}$$

$$\left(\boldsymbol{d}\hat{\beta}'\right)\ \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} - \boldsymbol{X}'\mathbf{y}\right) \equiv 0 \qquad \neq 0$$

Portanto, a diferencial de Z será identicamente nula para $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\mathbf{y}$

(sistema de equações normais)

(2)

Se existir $\left(X'X\right)^{-1}$ teremos

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}\mathbf{y}}$$

- ANÁLISE DE VARIÂNCIA DA REGRESSÃO LINEAR

- Soma de quadrado do resíduo

De (1) e (2) temos

$$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{y'y} - 2\hat{\beta}'\boldsymbol{X'}\mathbf{y} + \hat{\beta}'\boldsymbol{X'y} \qquad \text{ou,}$$

$$\text{S.Q. Resíduo} = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y'y} - \hat{\beta}'\boldsymbol{X'}\mathbf{y}$$

- Soma de quadrados total

$$\text{S.Q. total} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}^2 - C \qquad \text{C=}\frac{G^2}{I.J}$$

$$= \mathbf{Y'Y - C}$$

- Soma de quadrados de regressão

$$\text{S.Q. Reg.} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(\hat{Y}_{ij} - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\hat{Y}_{ij}^2 - C$$

$$= \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{C}$$

$$= \left(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{C}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{C}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'}\mathbf{y} - \boldsymbol{C}$$

Quadro da Anva da Regressão

Fonte de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	p – 1	$\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'}\mathbf{y} - \boldsymbol{C}$	S.Q. Reg. / p – 1	Q.M. Reg. / Q.M. Res.
Resíduo	IJ - p	$\left(\mathbf{y'y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'}\mathbf{y}\right)$	S.Q. Res. / IJ - p	--------
Total	IJ – 1	$\mathbf{y'y} - \boldsymbol{C}$	---------	--------

Onde p – é o número de parâmetros no modelo: y = a + bX
p=2

Teste F

$$\begin{cases} Ho: b = 0 \\ Ha: b \neq 0 \end{cases}$$

Coeficiente de Determinação

$$R^2 = \frac{S.Q.Reg.}{S.Q.Tratamentos}$$

$-1 \leq R \leq 1$

$0 \leq R^2 \leq 1$

Mostra a proporção da soma de quadrados total que é "explicada" pela regressão. Melhor próximo de 1.

- Soma de quadrados da falta de ajuste

S.Q. falta de Aj. = S.Q. Trat. – S.Q. Reg. (com I-p gl)

Onde S.Q. Trat. = $\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I} T_i^2 - C$

Quadro de Anva da regressão

Causa de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	p - 1	$\hat{\boldsymbol{\beta}}'X'\mathbf{y} - C$	S.Q. Reg. / (p – 1)	Q.M. Reg. / Q.M. Res.
Falta de Aj.	I – p	Por diferença	S.Q. Falta Aj. / (I – p)	Q.M. Falta Aj. / Q.M. Res
Tratamentos	(I –1)	$\frac{1}{J}\sum T_i^2 - C$	S.Q. Trat / (I – 1)	Q.M. Trat. / Q.M. Res.
Resíduo	IJ –I	$\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'X'\mathbf{y} - faltaAj.$	S.Q. Res. / IJ - I	--------
Total	IJ – 1	$\mathbf{y}'\mathbf{y} - C$	--------	--------

Exemplo: Um ensaio foi realizado em DIC com o objetivo de estudar o tempo de sono (min.) a diferentes doses (1, 2, 3, 4 e 5) de um sonífero em coelhos.

	TRATAMENTO					
Repetição	A	B	C	D	E	
1	3	5	8	9	12	
2	4	9	10	13	11	
3	8	13	12	17	16	
Total	15	27	30	39	39	$\boxed{150}$

S.Q. Trat. = $\frac{1}{3}\left(15^2 + \ldots + 39^2\right) - C$ $\qquad$ C= $\frac{(150)^2}{15} = 1.500$

$= 1632 - 1500 = 132 \text{ min.}^2$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \\ 5 \\ 9 \\ 13 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 9 \\ 13 \\ 17 \\ 12 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix}_{15} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{15 \times 2}$$

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 15 & 45 \\ 45 & 165 \end{bmatrix} \qquad X'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 150 \\ 510 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{X'X})^{-1} = \frac{1}{450}\begin{bmatrix} 165 & -45 \\ -45 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \therefore \hat{Y}_i = 4 + 2X_i \qquad ,i = 1,2,\ldots,5$$

A equação de regressão nos indica que para cada aumento de 1 unidade na dose do sonífero, espera-se em média um aumento de 2 minutos de sono em coelhos.

S.Q. Reg. = $\hat{\beta}'X'\mathbf{y} - C$ = 1.620-1.500
= 120 min^2

S.Q. Total = $\mathbf{Y'Y} - \mathbf{C} = 1732 - 1.500 = 232 \text{ min}^2$

S.Q Falta Aj= S.Q. Trat. – S.Q. Reg. = 132 –120=12 min^2

S.Q Res. = S.Q. Total – S.Q. Trat = 232 – 132 =100 min^2

Quadro da Análise de variância da regressão

Causa de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Regressão	1	120	120	12,0**
Falta de Aj.	3	12	4	0,4 ns
Tratamento	(4)	132	33	3,3 ns
Resíduo	10	100	10	--------
Total	14	232		

$$F_{(1,10)} = \begin{cases} 4{,}96 & \alpha = 0{,}05 \\ 10{,}0 & \alpha = 0{,}01 \end{cases}$$

$$F_{(3,10)} = \begin{cases} 3{,}71 & \alpha = 0{,}05 \\ 6{,}55 & \alpha = 0{,}01 \end{cases}$$

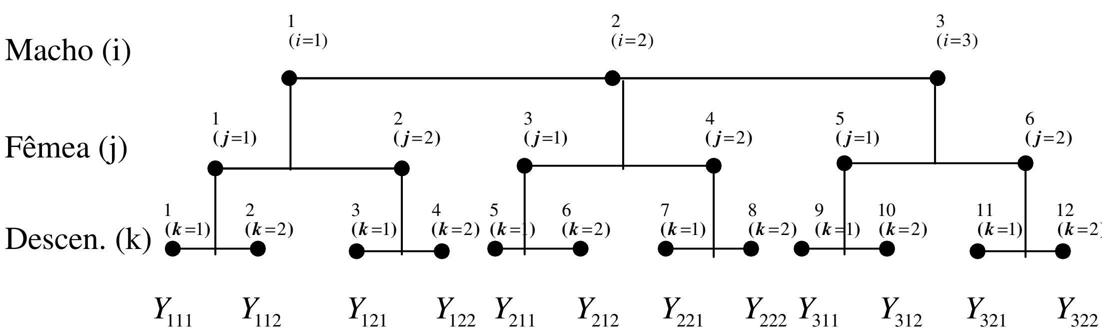
CONCLUSÃO: Como o valor de F para falta de ajustamento é não-significativo, conclui-se que a regressão linear simples é apropriada para analisar a relação entre as variáveis.

Modelos Hierárquicos

(***para estudo dos fatores hereditários do Pai e da Mãe, na variabilidade de uma característica***).

- PROCEDIMENTO: Sortear $\underline{I}$ machos, sortear $\underline{J}$ fêmeas, para serem cobertas pelos machos e, posteriormente, sortear $\underline{K}$ leitões de cada uma das IJ ninhadas, cujas características (peso, altura, comprimento, etc.) serão analisadas.

ESQUEMA (3 machos, 2 fêmeas, 2 descendentes). i=1, 2, 3 j=1, 2 k=1, 2
I=3 J=2 K=2



IDÉIA: Compara-se fatores que variam "dentro" de outros fatores.

- Modelo matemático (ALEATÓRIO)

$$\boxed{Y_{ijk} = \mu + M_i + F_{j(i)} + e_{ijk}}$$

$$i = 1, 2, \ldots, I$$
$$j = 1, 2, \ldots, J$$
$$k = 1, 2, \ldots, K$$

Onde: Y_{ijk} : observação referente ao descendente k, filho da fêmea j e do macho i;

μ : Média geral do ensaio;

M_i : efeito do macho i;

$F_{j(i)}$: efeito da fêmea j dentro do macho i;

e_{ijk} : efeito dos fatores não controlados do descendente k dentro da fêmea j e macho i.

- HIPÓTESES DO MODELO

a) Aditividade b) Homogeneidade de variâncias c) Normalidade e independência dos erros.

- OBS $_1$: Não existe interação M x F ou é desprezível.

- OBS $_2$: Existe uma diferença entre classificação hierárquica e cruzada.

		B			
		b_1	b_2	b_3	b_4
A	a_1	$a_1\ b_1$	$a_1\ b_2$	$a_1\ b_3$	$a_1\ b_4$
	a_2	$a_2\ b_1$	$a_2\ b_2$	$a_2\ b_3$	$a_2\ b_4$

		B			
		b_1	b_2		
A	a_1	$a_1\ b_1$	$a_1\ b_2$	b_3	b_4
			a_2	$a_2\ b_3$	$a_2\ b_4$

- OBTENÇÃO DA ANVA

Quadro – Valores observados no ensaio Hierárquico

Machos (i) Árvores(i)	Fêmeas (j) Ramos(j)	Descendentes (k) Folhas(k)	Total
1	1 2 $\vdots$ J	$Y_{111}\quad Y_{112}\dots Y_{11K}$ $Y_{121}\quad Y_{122}\dots Y_{12K}$ $\vdots\quad\vdots\quad\vdots$ $Y_{1J1}\quad Y_{1J2}\dots Y_{1JK}$	$Y_{11\bullet}$ $Y_{12\bullet}$ $\vdots$ $Y_{1J\bullet}\quad Y_{1\bullet\bullet}$
2 $\vdots$	1 2 $\vdots$ J $\vdots$	$Y_{211}\quad Y_{212}\dots Y_{21K}$ $Y_{221}\quad Y_{222}\dots Y_{22K}$ $\vdots\quad\vdots\quad\vdots$ $Y_{2J1}\quad Y_{2J2}\dots Y_{2JK}$ $\vdots\quad\vdots\quad\vdots$	$Y_{21\bullet}$ $Y_{22\bullet}$ $\vdots$ $Y_{2J\bullet}\quad Y_{2\bullet\bullet}$ $\vdots\quad\vdots$
I	1 2 $\vdots$ J	$Y_{I11}\quad Y_{I12}\dots Y_{I1K}$ $Y_{I21}\quad Y_{I22}\dots Y_{I2K}$ $\vdots\quad\vdots\quad\vdots$ $Y_{IJ1}\quad Y_{IJ2}\dots Y_{IJK}$	$Y_{I1\bullet}$ $Y_{I2\bullet}$ $\vdots$ $Y_{IJ\bullet}\quad Y_{I\bullet\bullet}$
			G

Correção $\quad C = \dfrac{G^2}{IJK}$

S.Q. Total $\quad = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} Y_{ijk}^2 - C$

S.Q Machos $= \frac{1}{JK}\sum_{i=1}^{I} Y_{i}^{2}.. - C$

S.Q. Fêmeas d. Machos =

$$\frac{1}{K}\left(Y_{11}^2. + Y_{12}^2. + \ldots + Y_{1J}^2\right) - \frac{(Y_1..)^2}{JK} + \frac{1}{K}\left(Y_{21}^2. + Y_{22}^2. + \ldots + Y_{2J.}^2\right) - \frac{(Y_2..)^2}{JK} + \ldots + \frac{1}{K}\left(Y_{I1}^2. + Y_{I2}^2. + \ldots + Y_{IJ.}^2\right) - \frac{(Y_I..)^2}{JK}$$

Δ Outra Maneira

S.Q. Fêmeas d. Machos = S.Q. Fêmeas – S.Q. Machos
Onde

S.Q. Fêmeas $= \frac{1}{K}\left(Y_{11}^2. + Y_{12}^2. + \ldots + Y_{IJ}^2.\right) - C$

$$= \frac{1}{K}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}^2.\right) - C$$

S.Q. Descendentes d. Fêmeas d. Machos = S.Q. Total – S.Q. Machos – S.Q. Fêmeas d. Machos.

Δ Outra Maneira

S.Q. Descendentes d. Fêmeas d. Machos =

$$\left(Y_{111}^2 + Y_{112}^2 + \ldots + Y_{11K}^2\right) - \frac{(Y_{11.})^2}{K} + \ldots + \left(Y_{121}^2 + Y_{122}^2 + \ldots + Y_{12K}^2\right) - \frac{(Y_{12.})^2}{K} + \ldots + \left(Y_{IJ1}^2 + Y_{IJ2}^2 + Y_{IJK}^2\right) - \frac{(Y_{IJ.})^2}{K}$$

Quadro da Anva (modelo aleatório)

Fonte de variação	**GL**	**S.Q**	**Q.M**	**E(Q.M)**
Machos	I-1	S.Q. M	QM.M	$\sigma^2 + K\sigma_F^2 + JK\sigma_M^2$
Fêmeas d. Machos	I(J-1)	S.Q. F d. M	QM. F d. M	$\sigma^2 + K\sigma_F^2$
Descendentes d. Fêmeas d. Machos	IJ(K-1)	S.Q. D d. F d. M	QM D d. F d. M	σ^2
Total	IJK – 1			

Estimativa dos componentes de variâncias

$$\hat{\sigma}^2 = \text{QM D d. F d. M}$$

$$\hat{\sigma}_F^2 = \frac{\text{QM F d. M} - \text{QM D d. F d. M}}{K}$$

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{\text{QM M} - \text{QM F d. M}}{JK}$$

Interpretação genética dos componentes de variância

$\sigma_M^2 = \frac{1}{4} V_A$, onde $\boldsymbol{V_A}$: Variância aditiva

$\sigma_F^2 = \frac{1}{4} V_A + \frac{1}{4} V_D + V_C$, onde $\boldsymbol{V_D}$: Variância dominante / $\boldsymbol{V_C}$: Variância ambiental intra-uterina

$\sigma^2 = \frac{1}{2} V_A + \frac{3}{4} V_D + V_E$, onde $\boldsymbol{V_E}$: Variância Ambiental

Temos:

Variância Total = $\sigma_M^2 + \sigma_F^2 + \sigma_D^2$
$= \boldsymbol{V_A + V_D + V_C + V_E}$

Variância Aditiva ($\boldsymbol{V_A}$) = $4\sigma_M^2$

Def: Herdabilidade (sentido restrito) – mede, em uma população, a fração da variância total atribuída à variância aditiva.

$$h^2 = \frac{\textit{Variância aditiva}}{\textit{Variância total}} = \frac{V_A}{V_A + V_D + V_C + V_E}$$
$$= \frac{4\sigma_M^2}{\sigma_M^2 + \sigma_F^2 + \sigma_D^2}$$

$0 \le \boldsymbol{h}^2 \le 1$

$\rightarrow$ Variação Fenotípica só depende das variações dos genótipos dos indivíduos

$\rightarrow$ Variação não tem origem genética

Estimativa

$$\hat{h}^2 = \frac{4\hat{\sigma}_M^2}{\hat{\sigma}_M^2 + \hat{\sigma}_F^2 + \hat{\sigma}_D^2}$$

$$\underbrace{0 \leftrightarrow 0{,}5}_{\text{Baixa Herdabilidade}} \underbrace{\leftrightarrow 1}_{\text{Alta Herdabilidade}}$$

Exemplo: Dois Touros Representativos da raça holandesa foram acasalados com 2 diferentes vacas da mesma raça. Os bezerros foram pesados logo após o nascimento. (Kg)

Touro	Vaca	Peso dos Bezerros	Total	
T_1	V_1	15,8 16,0	31,8	
	V_2	18,1 18,1	36,2	68,0
T_2	V_3	13,0 17,0	30,0	
	V_4	18,0 18,3	36,3	66,3

G= 134,3

I = 2 J = 2 K = 2

- $$C = \frac{(134{,}3)^2}{2x2x2} = 2.254{,}5612$$

- S.Q Total $= 15{,}8^2 + \ldots + 18{,}3^2 - C$

  $= 2.277{,}75 - 2.254{,}5612$

  $= 23{,}1888$

- S.Q Touros $= \frac{1}{4}\left(68{,}0^2 + 66{,}3^2\right) - C$

  $= 2.254{,}9225 - 2.254{,}5612$

  $= 0{,}3613$

- S.Q Vacas d. Touros = S.Q Vacas – S.Q Touros

  Onde S.Q Vacas $= \frac{1}{2}\left(31{,}8^2 + 36{,}2^2 + 30{,}0^2 + 36{,}3^2\right) - C$

  $= 2.269{,}685 - 2.254{,}5612$

  $= 15{,}1238$

  S.Q Vacas d. Touros = 15,1238 – 0,3613

  $= 14{,}7625$

S.Q Bezerros d. Vacas d. Touros = 23,1888 – 0,3613 – 14,7625 = 8,065

Quadro da Anva

Fonte de variação	G.L	S.Q	QM	F
Touros	1	0,3613	0,3613	$0,1792^{ns}$
Vacas d. Touro	2	14,7625	7,38125	$3,6608^{ns}$
Bezerros d. Vacas d. Touros	4	8,065	2,01625	------
Total	7	23,1888	-------	-------

$$\boldsymbol{F}_{(2;4;0,05)} = 6,94$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2,01625$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{Vacas}} = \frac{7,38125 - 2,01625}{2} = 2,6825$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{Touro}} = \frac{0,3613 - 7,38125}{4} = -1,7549$$

$$\hat{\boldsymbol{h}}^2 = \frac{4\boldsymbol{x}(-1,7549)}{-1,7549 + 2,6825 + 2,01625} = \frac{-7,0195}{2,94387} = -2,3844$$

Conclusão: A variação não tem origem genética.