

também colineares.

3. Seja $\sigma: F \rightarrow F'$ uma semelhança. Mostre que dados 3 pontos não colineares A, B, C em F , o ângulo $A'B'C'$ é igual ao ângulo ABC .

4. Sejam F uma figura plana, O um ponto fora de F e k um número real positivo. A cada ponto A de F associemos o ponto A' , no prolongamento de AO , tal que $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$. Os pontos A' assim obtidos formam uma Fig. F' . Mostre que a função $\sigma: F \rightarrow F'$ tal que $\sigma(A) = A'$ para todo $A \in F$ é uma semelhança de razão k .

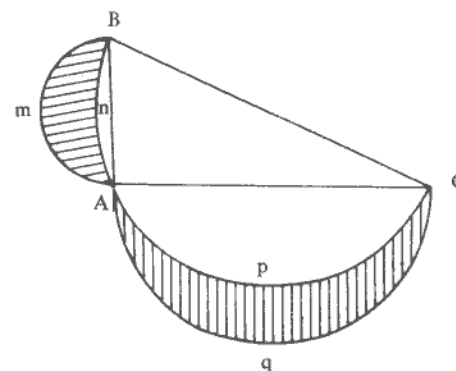
5. Prove que dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são figuras semelhantes.

6. Seja ABC um triângulo retângulo. Do vértice A do ângulo reto, baixe-se a perpendicular AD sobre a hipotenusa BC . Prove que os triângulos ABD , ADC e ABC são semelhantes. Note que a área de ABC é igual à soma das áreas de ADC e ABD .

7. Seja ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC . Sejam F, G e H figuras planas com as seguintes propriedades: 1ª) F contém os pontos A e B , G contém os pontos A e C , H contém os pontos B e C . 2ª) Existem semelhanças $\sigma: F \rightarrow H$ e $\tau: G \rightarrow H$ tais que

$\sigma(B) = B$, $\sigma(A) = C$, $\tau(A) = B$ e $\tau(C) = C$. Prove que $\text{área}(H) = \text{área}(F) + \text{área}(G)$.

8. (Teorema de Pitágoras.) A área do quadrado que tem como lado a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados os catetos.



9. (Lúnulas de Hipócrates.) Na figura, ABC é um triângulo retângulo, $BnApC$, BmA e AqC são semicircunferências cujos diâmetros são, respectivamente, BC , AB e AC . Prove que a soma das áreas das figuras hachureadas é igual à área do triângulo ABC .

10. Consideremos no plano π um sistema de coordenadas cartesianas (dadas por dois eixos ortogonais OX e OY). Consideremos dois números reais positivos a, b e definamos uma função $f: \pi \rightarrow \pi$ requerendo que $f(P) = P'$, onde $P = (x, y)$ e $P' = (ax, by)$. Em outras palavras, f transforma um ponto de coordenadas (x, y) no ponto de

coordenadas (ax, by) . Prove que, uma figura qualquer F no plano π , é transformada por f numa Fig. F' tal que área de $F' = ab \times$ (área de F).

11. Novamente, tomemos um sistema de eixos ortogonais OX e OY no plano π . Prove: 1º) Que um ponto $P = (x, y)$ pertence ao círculo C , de centro O e raio 1 se, e somente se, $x^2 + y^2 \leq 1$. 2º) A função $f: \pi \rightarrow \pi$, definida no exercício anterior, transforma o círculo C numa Fig. E cuja área é $\pi a \cdot b$. 3º) Um ponto $P = (x, y)$ pertence à Fig. E se, e somente se, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 4º) A Fig. E chama-se uma elipse, cujos diâmetros medem $2a$ e $2b$. Suponhamos $a \geq b$. Os pontos $F = (-c, 0)$ e $F' = (c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, chamam-se os focos da elipse. Prove que um ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse E se, e somente se, $\overline{PF} + \overline{PF'} \leq 2a$.

12. Chama-se apótema de um polígono regular P à distância do centro de P a um qualquer dos seus lados. Prove que a área do polígono regular é igual ao produto do apótema pela metade do perímetro.

13. O objetivo deste exercício é mostrar que, dado um círculo C de raio r , a área de C pode ser aproximada, com a precisão que desejarmos, pelas áreas dos polígonos regulares P_n , inscritos em C , e Q_n , circuns-

critos a C . (O índice n indica o número de lados do polígono.) Sejam c = área de C , a_n = área de P_n , b_n = área de Q_n e h_n = apótema de P_n . Evidentemente, o apótema de Q_n é r . Prove os seguintes fatos: 1º) $\frac{b_n}{a_n} = \left(\frac{r}{h_n}\right)^2$. 2º) $0 < r - h_n < \frac{1}{2} t_n$, onde t_n é o comprimento do lado de P_n . 3º) Justifique as igualdades e desigualdades:

$$0 < b_n - a_n = a_n \left(\frac{r^2}{h_n^2} - 1 \right) < c \left(\frac{r^2 - h_n^2}{h_n^2} \right) < c \frac{(r - h_n)(r + h_n)}{\frac{r}{2}} < c \frac{\frac{1}{2} t_n \cdot 2r}{\frac{r}{2}} = 2c \cdot t_n.$$

4º) Conclua que, tomando-se n muito grande, a diferença (positiva) área de Q_n - área de P_n pode tornar-se tão pequena quanto desejemos. Como

$$\text{área de } P_n < \text{área de } C < \text{área de } Q_n,$$

conclua que as área de Q_n e de P_n podem aproximar-se tanto quanto desejemos da área de C .

14. O comprimento de uma circunferência C de centro r é o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos inscritos em C e cujas aproximações por excesso são os perímetros dos polígonos circunscritos. O comprimento de uma circunferência de raio r é uma função $g(r)$ do raio. Prove, a partir da defini-