

Mecânica Quântica I - 4302403

8ª lista

- 1) a) Obtenha os estados tripleto de spin 1 aplicando o operador S_- ao estado $|1\ 1\rangle = \uparrow\uparrow$
b) Aplique os operadores S_{\pm} ao estado singlete de spin 0:

$$|0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow).$$

Explique o resultado obtido.

- c) Mostre que a ação dos operadores S_{\pm} no estado

$$|1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$$

fornece:

$$S_{\pm}|1\ 0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1\ \pm 1\rangle.$$

- c) Mostre que os estados $|1\ 1\rangle = \uparrow\uparrow$ e $|1\ -1\rangle = \downarrow\downarrow$ são auto-estados de S^2 , com autovalores apropriados.

- 2) Dois elétrons estão no estado $|s, m\rangle = |1, -1\rangle$. Numa medida de S_{1z} , quais serão os possíveis valores obtidos e as probabilidades correspondentes.

- 3) Os *hádrons* são constituídos de partículas elementares, possuindo spin 1/2, denominadas *quarks*. Os *bárions* (próton, neutron, etc) são constituídos de 3 quarks, enquanto que os *mésons* (píon, káon, etc) são constituídos de um quark e um anti-quark.

- a) Quais são os possíveis spins dos mésons?
b) Quais são os possíveis spins dos bárions?

- 4) Considere a função de onda de um sistema de duas partículas idênticas dada por:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\Psi_a(\vec{r}_1)\Psi_b(\vec{r}_2) \pm \Psi_a(\vec{r}_2)\Psi_b(\vec{r}_1)].$$

- a) Se Ψ_a e Ψ_b são ortogonais e normalizadas, determine A para que Ψ também seja normalizada.
b) Se $\Psi_a = \Psi_b$, quem é A para o caso dos bósons?

- 5) Considere um sistema de duas partículas idênticas, não interagentes de massa m , cada uma delas sujeita a um potencial harmônico unidimensional $V = m\omega^2 x^2/2$.

- a) Em termos dos auto-estados de uma partícula já estudados anteriormente, escreva a função de onda e a auto-energia correspondente ao estado das duas partículas, uma no estado n e outra no estado m , para os casos em que ambas: i) são bósons idênticos, ii) são férmions idênticos.

- b) Qual a energia do estado fundamental e a função de onda correspondente dessas duas partículas nos dois casos acima?

- c) Considere agora o caso em que os dois férmions, de spin 1/2, possuem também função de onda de spin. Qual é a energia do estado fundamental e do primeiro estado excitado e as funções de onda correspondentes?

6) Considere três partículas, uma em cada um dos estados $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$ e $\psi_c(x)$. Assumindo que $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$ e $\psi_c(x)$ são ortogonais e normalizados, construa os estados de três partículas representando: a) partículas distinguíveis, b) bósons idênticos, c) férmions idênticos. Dica: existe um truque para se construir estados completamente antissimétricos, baseado no determinante de Slater, cuja primeira coluna é $\psi_a(x_1)$, $\psi_b(x_1)$, $\psi_c(x_1)$ etc., a segunda linha é $\psi_a(x_2)$, $\psi_b(x_2)$, $\psi_c(x_2)$ etc., e assim por diante.

7) Discuta qualitativamente o esquema de níveis de energia do átomo de hélio, desprezando a repulsão entre os elétrons, se:

- a) os elétrons forem bósons idênticos.
- b) os elétrons forem partículas distinguíveis.
- c) os elétrons forem férmions idênticos de spin 1/2.

8) Considerando que a função de onda do estado fundamental do átomo de hélio é dada por:

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2),$$

mostre que a)

$$\left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\rangle = \frac{5}{4a_0}.$$

Dica: use coordenadas esféricas tal que

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2}$$

e integre primeiro em \vec{r}_2 .

b) Use o resultado de a) para mostrar que a energia de interação dos elétrons no estado fundamental do átomo de hélio é dada por

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right\rangle = 34 \text{ eV}.$$

Veja que se somarmos isso aos -109 eV (obtidos como a energia do estado fundamental do átomo de hélio quando desprezamos a energia de repulsão entre os elétrons), obtemos $(34-109)$ eV = -75 eV, muito próximo do valor experimental -79 eV.