

Introdução à Mecânica Lagrangiana

Victor Bernardo Chabu

Janeiro de 2011

Antes de tudo, leiam-se a Apresentação e os Prolegômenos, partes importantes desta apostila, a fim de que o leitor não se sinta enganado ou negligenciado nas páginas seguintes. Ademais, não se espere que o autor não tente puxar conversa. Bom estudo.

Apresentação

A ideia central desta apostila é introduzir os estudantes de física de forma natural ao formalismo lagrangiano, isto é, à abordagem da mecânica que lança mão de coordenadas generalizadas e das Equações de Lagrange para estudo de sistemas mecânicos, deixando de lado a aplicação direta da 2ª Lei de Newton e quase sempre de coordenadas cartesianas, pilar central do estudo de mecânica para os iniciantes.

Por estudante de física quer-se dizer o sentido mais literal da palavra, ou seja, *aquele que estuda física*, não importando se é um estudante da faculdade, no sentido convencional, algum entusiasta da ciência, ou mesmo um engenheiro interessado em métodos analíticos mais robustos. Leigos estão em certa medida inclusos no público alvo desta apostila, embora, é claro, seja totalmente impossível tratar seriamente de mecânica analítica sem contar com que o leitor tenha algum arcabouço matemático¹; a saber, é-lhe pedido que: conheça as operações de derivação de funções reais, incluindo a Regra da Cadeia para funções de várias variáveis; domine as aplicações mais básicas das derivadas na física; seja familiar aos resultados e métodos elementares da mecânica newtoniana.

Por introdução natural ao formalismo lagrangiano, entenda-se: nem a introdução de coordenadas generalizadas, nem a introdução da função lagrangiana e nem a busca pelas Equações de Lagrange serão feitas sem que o leitor sinta na pele a necessidade de ampliar sua capacidade de análise de sistemas mecânicos. Em seu curso de mecânica na faculdade, o autor foi apresentado a problemas de crescente dificuldade, ao longo de um semestre, os quais exigiram, aos poucos, a introdução de novos sistemas de referência (polares, cilíndricos, esféricos, não-inerciais de várias espécies, etc...), e, por conseguinte, a necessidade de se adaptar a 2ª Lei de Newton a cada um deles. Como resultado, quando o curso esbarrou no formalismo lagrangiano, nada pareceu mais adequado do que buscar uma metodologia geral para sistemas mecânicos, que fornecesse equações invariantes, independentes do sistema de coordenadas empregado. Embora não se tenha disponível nas próximas páginas um semestre inteiro de problemas que levem a mecânica newtoniana à exaustão, há um muito pequeno conjunto deles, que servirá para pelo menos exemplificar como situações físicas muito simples podem ser matematicamente intratáveis com os velhos métodos, evidenciando a necessidade de práticas de análise mais avançadas.

Finalmente, o trabalho a seguir foi redigido com o propósito único de ensinar. Isso isenta a apostila do dever de conter todas as fórmulas e de abordar todas as situações possíveis; lembramos que se trata de uma introdução à mecânica lagrangiana, e não um compêndio seu. Ao mesmo tempo, nosso propósito aporta-nos a obrigação de não apresentar qualquer resultado novo sem demonstração: o rigor matemático estará presente (com uma exceção única, quando o leitor será avisado e remetido a uma referência matemática para esclarecimento), mas não terá importância maior que a didática. Muitas das demonstrações necessárias são meros desenvolvimentos da Regra da Cadeia, o que não exige nada de raciocínio, apenas o seguimento de um algoritmo; tais passagens serão feitas apenas com os detalhes pertinentes, mas o leitor deve fazê-las todas ao longo do texto, como forma de exercício.

¹O leitor leigo pode preparar-se para a matemática (não muito profunda) exigida através de qualquer livro de Cálculo I e II empregado nos cursos de graduação, ignorando os capítulos que não forem relativos à derivação e à Regra da Cadeia.

Prolegômenos

Antes de iniciar o estudo de física propriamente dito, algumas observações, em maior parte matemáticas, devem ser feitas, a fim de evitar possíveis confusões futuras e tornar desde já claros alguns passos que serão dados.

Começemos por considerar uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Se f for derivável em relação a x_i em algum subconjunto $B \subset A$, então temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{com} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

ou seja, se uma aplicação é função de determinadas variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, suas derivadas parciais também serão função das mesmas variáveis. Isso não é difícil de ser mostrado partindo da definição de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Como a existência do limite está assegurada para todo $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \in B$, sabemos que não há dependência com h , portanto a derivada parcial continua sendo função apenas de $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Ademais, suponhamos que cada x_i possa ser função de um parâmetro t , $x_i : C \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (por simplicidade, consideramos o mesmo domínio para todo x_i), e seja derivável em $D \subset C$. Então podemos definir $g : C \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = (f \circ \vec{x})(t)$. Assim g é derivável em $D \cap \vec{x}^{-1}(B)$ e:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad \text{em que} \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

Nesse caso, a derivada de g continuará sendo função de t , pois, pelo mesmo argumento anterior, cada \dot{x}_i continua sendo função de t , e as parciais de f continuam sendo função de x_i , que são função de t .

Repare-se que a grande diferença entre g e f é a forma funcional: esta é explicitamente função de várias variáveis, aquela de uma única. Poder-se-ia pensar que f também é função de apenas uma variável, mas isso não é em geral verdade. Explicitamente f depende de várias variáveis consideradas independentes entre si; sob esse ponto de vista, a g seria uma restrição da f para quando as variáveis x_i já não podem mais variar livremente, porém devem seguir uma regra, dada pela dependência da curva \vec{x} em t : g não é apenas outro nome para f , é outra função, é a composição de f com a curva \vec{x} .

Se já se tem $f = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$, com os x_i dependendo de t de alguma maneira, faz sentido escrever:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Como g , f agora até pode ser considerada função apenas de t , embora *explicitamente* ela ainda seja função de outras variáveis x_i mutuamente independentes e também de \dot{x}_i . Porém, frequentemente $\frac{\partial f}{\partial t} \neq \frac{df}{dt}$.

Acima apenas usamos a Regra da Cadeia, do ponto de vista matemático é algo que não deixa dúvidas. Do ponto de vista físico tampouco, portanto vale a pena uma ilustração de como é fundamental reconhecer a *dependência total* e a *dependência explícita* de uma quantidade com um parâmetro. Basta considerar a função distância de uma partícula à origem no plano cartesiano. Denotemos: $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

É claro que essa é uma quantidade puramente geométrica, podemos utilizá-la para qualquer ponto do plano, e não existe nenhuma dependência temporal, apenas com os pontos (x, y) , que podem variar livremente. Porém, se considerarmos o movimento ao longo do tempo, teremos $x = x(t)$ e $y = y(t)$, e então a função d poderá ser utilizada especificamente para aqueles pontos por onde a partícula passará, o que será denotado como a curva \vec{r} descrita. À distância da partícula à origem ao longo do tempo chamaremos s : $s(t) = d[x(t), y(t)] = (d \circ \vec{r})(t)$. Vamos dizer que o movimento seja uma reta que não passa pela origem e seja uniforme: $x(t) = x_0 + v_x t$ e $y(t) = y_0 + v_y t$, com $(x(t), y(t)) \neq (0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$ e $x_0, y_0, v_x, v_y \in \mathbb{R}$. Sem ter s diretamente, encontra-se $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial d}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial d}{\partial y} \dot{y} = \frac{xv_x + yv_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(x_0 + v_x t)v_x + (y_0 + v_y t)v_y}{\sqrt{(x_0 + v_x t)^2 + (y_0 + v_y t)^2}}$$

²Ver Seção 2.1 para um exemplo da diferença entre as derivadas parcial e total de uma quantidade com um parâmetro, tanto em termos de valor quanto em termos de significado físico.

Se tivéssemos escrito s explicitamente: $s(t) = \sqrt{(x_0 + v_x t)^2 + (y_0 + v_y t)^2}$, obteríamos o mesmo resultado mediante derivação comum em \mathbb{R} , como deveria ser.

Concentremo-nos doravante em outra observação. Seja $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma dada família de funções, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Existe uma outra família de funções, inversas às primeiras, $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_i = x_i(f_1, f_2, \dots, f_n)$, quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

ou seja, quando o determinante jacobiano das f_i em relação às x_i (ou vice-versa) não é nulo. Para um enunciado mais preciso desse fato, e também para uma demonstração, o leitor é remetido à [1], no entanto adverte-se que a compreensão desse livro costuma exigir boa preparação, não sendo uma leitura simples para a maior parte dos estudantes dos primeiros anos da graduação. Diante disso, restringimo-nos a comentários de maior utilidade para a sequência do texto: qual é a importância desse fato referente à inversibilidade de funções para o estudo subsequente?

Consideremos o espaço euclidiano. Para determinar completamente um de seus pontos, uma tripla de valores (x, y, z) é suficiente e necessária. Não se disse que (x, y, z) é um ponto do espaço cartesiano, ou, o que é equivalente, um ponto de \mathbb{R}^3 . De fato, dado qualquer espaço vetorial V^3 , existe uma bijeção entre V^3 e \mathbb{R}^3 . Tal resultado elementar de álgebra linear pode ser interpretado do seguinte modo: bastam três coordenadas, e não menos de três, para determinar qualquer posição no espaço. A natureza delas pode variar, isto é, podem-se ter vários sistemas de coordenadas³: cartesiano, em que as três componentes são distâncias, cilíndrico, em que duas são distâncias e uma é um ângulo, esférico, com dois ângulos e uma distância, etc.

Seja S o sistema cartesiano, e S' um outro suposto sistema. Para determinado problema, pode ser mais conveniente usar-se S' que S , no entanto, para que isso seja possível, é necessário que o suposto novo sistema tenha uma relação biunívoca com S , em outras palavras, um conjunto de coordenadas em S' deve corresponder a um único ponto do espaço, portanto a uma única tripla de S ; reciprocamente, um ponto do espaço, que é representado sem ambiguidade por uma tripla de S , deve admitir somente uma única expressão em termos das coordenadas de S' . Em resumo, a função matemática que transforma as coordenadas de S' em S deve ser biunívoca, portanto inversível.

Ora, esse fato é óbvio, embora matematicamente seja difícil estudar a inversibilidade de funções de várias variáveis. A postura desta apostila será, portanto, abrir uma exceção ao rigor matemático e trabalhar sem maiores preocupações com sistemas de coordenadas cuja validade possa ser geometricamente averiguada sem maiores complicações. Teremos vários exemplos disso nas próximas páginas.

Note-se que não é porque uma partícula move-se no espaço que são necessárias três coordenadas para descrever seu movimento. Por exemplo, em um plano inclinado, a cada altura y em que uma partícula esteja, corresponde-lhe uma única distância x até uma das extremidades do plano. Sendo assim, basta determinar duas das três coordenadas espaciais para descrever-se perfeitamente o movimento, pois a terceira segue das anteriores. A quantidade de coordenadas necessárias para a descrição completa de um movimento é o número de *graus de liberdade*. Tais restrições são chamadas *vínculos*. No caso do plano com inclinação α , tem-se o vínculo $y = x \tan \alpha$. Define-se de forma natural que o número de graus de liberdade é a simples diferença entre a dimensão do movimento e a quantidade de vínculos presentes.

É necessário que se frise a dessemelhança entre um vínculo e uma restrição dinâmica sobre o movimento do sistema. O vínculo é uma imposição de ordem cinemática: estabelece-se que a partícula deverá mover-se em determinado domínio, ou com velocidade atrelada a algum fator, mas é sempre uma imposição, digamos, antes de ocorrer o movimento. Restrições dinâmicas são meras consequências do comportamento do sistema. A título de exemplo, consideremos um pêndulo simples, que oscila dentro de uma amplitude angular $< \pi$. O comprimento da haste que liga a massa do pêndulo a seu suporte participa de um vínculo, pois restringe *a priori* a distância da massa ao suporte. Neste caso, o movimento ocorre em um plano de oscilação, bidimensional; devido à presença de um vínculo, no entanto, apenas uma coordenada é necessária para descrever o movimento, a qual pode ser o ângulo da haste com a vertical. A partir dela descreve-se o movimento em duas dimensões, (x, y) que seja. Já o fato de que o pêndulo está confinado a oscilar dentro de sua amplitude máxima não é um vínculo, é uma restrição dinâmica, pois não é algo imposto ao sistema, mas uma consequência do comportamento físico, decorrente da energia do pêndulo.

³Espera-se que o leitor esteja habituado pelo menos a orientar-se nos sistemas mais básicos. Adiante alguns deles serão rerepresentados, no entanto convém uma introdução preliminar, que pode ser encontrada na [2].

1 Adequação de Sistemas de Coordenadas

1.1 Equações de Movimento na Mecânica Newtoniana

A mecânica newtoniana inicialmente não foi formulada em cima de um sistema de coordenadas privilegiado. Na verdade, a 1ª Lei de Newton apenas traz implícita a exigência de que se adote um referencial inercial, o que garante a validade da 2ª Lei, que por sua vez apresenta a regra básica da mecânica, relacionando a mudança de um movimento à interação (força) que se exerce sobre um sistema.

Sem dispor de coordenadas, mas também sem usufruir de qualquer formalismo vetorial, a 2ª Lei, em seu enunciado original, contém por extenso toda a informação codificada na linguagem moderna por $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. Recorramos diretamente à fonte (referência [3]):

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressa,
et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

A primeira linha afirma o caráter de magnitude da 2ª Lei de Newton, enquanto que, na segunda, é fácil perceber a imposição de que a mudança do movimento ocorre em uma linha reta, orientada conforme a força (*vis*) é exercida. Ora, isso de forma alguma precisa de um sistema de coordenadas para ser entendido; no entanto, para ser tratado, é fundamental que se saiba exprimir as quantidades numéricas de variação do momento pelas direções permitidas no espaço.

Já que a variação do movimento ocorrerá em um traçado retilíneo paralelo à força, nada mais natural que adotar o sistema cartesiano para as aplicações mais simples. Nesse caso a formulação matemática da 2ª Lei em componentes é imediata (considerando a massa da partícula constante):

$$\begin{cases} F_x = \dot{p}_x = m\ddot{x} \\ F_y = \dot{p}_y = m\ddot{y} \\ F_z = \dot{p}_z = m\ddot{z} \end{cases} \quad (1)$$

pois cada uma das direções cartesianas é uma reta, então basta projetar \vec{F} em cada uma delas, e assim obtém-se a respectiva componente de $\dot{\vec{p}}$.

No entanto, nem todos os sistemas de coordenadas são assim simples, em particular aqueles que não envolvem apenas direções retas, mas também componentes angulares. Sempre podem-se adaptar as Equações (1) para outros sistemas, basta considerar as coordenadas cartesianas em função das do sistema em questão e, mediante a Regra da Cadeia, obter \ddot{x} , \ddot{y} e \ddot{z} em função dessas. A busca por um método geral para esse procedimento levar-nos-á ao formalismo lagrangiano. Porém, antes passemos por alguns exemplos para entender na prática o que se disse neste parágrafo.

1.2 Problema em Sistema Cartesiano

Apenas para absorver o espírito desta apostila, comecemos com um exemplo fácil. Será exposta uma situação física, que aqui terá caráter de um problema a ser desvendado. Resolver o problema não significará encontrar a equação horária das posições, mas sim chegar à equação diferencial que rege o comportamento do sistema. Embora pareça decepcionante dar o trabalho como encerrado simplesmente ao obter-se uma equação diferencial, esse é um enorme passo para a compreensão da física envolvida na situação em análise.

A resolução das equações a que se chega com emprego da mecânica newtoniana em geral é difícil de ser feita analiticamente, pois são equações diferenciais de 2ª ordem, como se pode ver nas (1), muitas vezes não-lineares e inhomogêneas. Existe um outro formalismo, posterior ao de Lagrange, que tem como uma das preocupações fundamentais fornecer equações diferenciais triviais para o movimento, baseando-se em escolhas nada óbvias e muito bem feitas de sistemas de coordenadas. Em suma, resolver as equações que serão obtidas é tarefa árdua e muitas vezes não será levada a cabo, embora eventualmente análises a partir delas sejam interessantes. A equação diferencial codifica o comportamento do sistema físico, tê-la é essencial. De todo modo, é sempre possível resolver as ditas equações numericamente com métodos acessíveis a qualquer aluno da graduação que já tenha sido apresentado a um computador.

Ao trabalho: consideremos um lançamento balístico na atmosfera, como na Figura 1.a da próxima página, cujo alcance seja curto, de forma a podermos ignorar os efeitos de rotação da Terra. Como na ilustração, temos atuando sobre o projétil duas forças: o peso, é claro, e a resistência imposta pela atmosfera. Sendo m a massa do projétil, será o peso $\vec{P} = m\vec{g}$. Vamos dizer que $g = \|\vec{g}\|$, e \vec{r} é a posição do projétil.

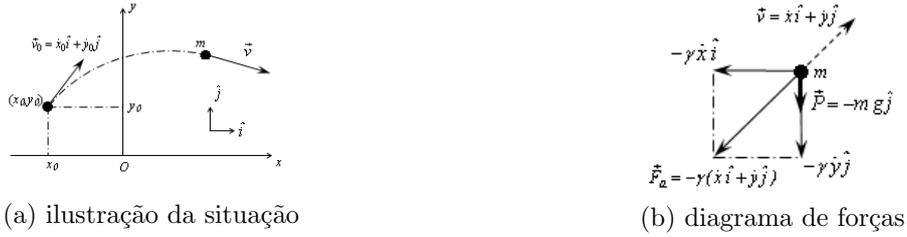


Figura 1: Lançamento balístico atmosférico, a curta distância.

Quanto à força atritiva \vec{F}_a , por simplicidade digamos que o escoamento de ar seja laminar, sem turbulências. Um bom modelo para esse regime é ter o atrito proporcional à velocidade de escoamento (em sentido contrário). Ainda por simplicidade vamos dizer que a atmosfera está parada, de modo que a velocidade de escoamento é a própria velocidade \vec{v} do projétil, assim: $\vec{F}_a = -\gamma\vec{v}$, com $\gamma \in \mathbb{R}$. Atenção para o fato de que implicitamente já escolhemos um referencial, que pode ser o solo, por exemplo, com origem em um ponto qualquer. De acordo com a Lei de Newton, fazendo a decomposição em componentes cartesianas seguindo o diagrama da Figura 1.b, com \vec{F} a força total:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_a \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - \gamma\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} = -g \end{cases} \quad (2)$$

O problema está resolvido. É possível resolver analiticamente as (2) sem dificuldade, pois elas são realmente simples, bastando utilizarmos a esperteza de multiplicar as equações por $e^{\frac{\gamma}{m}t}$:

$$\begin{cases} \ddot{x}e^{\frac{\gamma}{m}t} + \frac{\gamma}{m}\dot{x}e^{\frac{\gamma}{m}t} = 0 \\ \ddot{y}e^{\frac{\gamma}{m}t} + \frac{\gamma}{m}\dot{y}e^{\frac{\gamma}{m}t} = -ge^{\frac{\gamma}{m}t} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}e^{\frac{\gamma}{m}t}) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}_0e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{y}e^{\frac{\gamma}{m}t}) = -ge^{\frac{\gamma}{m}t} \Rightarrow \dot{y}(t) = \left(\dot{y}_0 + \frac{mg}{\gamma}\right)e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}$$

Acima, \dot{x}_0 e \dot{y}_0 são respectivamente as componentes da velocidade inicial em x e em y . Uma integração fácil mais um ajuste de constantes possibilita a obtenção das equações horárias do movimento proposto.

1.3 Problema em Sistema Esférico

No caso que segue vamos dispendir mais tempo e esforços; mesmo que não cheguemos a resolver as equações de movimento, faremos algumas análises razoavelmente profundas. Considere-se um pêndulo totalmente livre no espaço, isto é, uma massa m pendurada em um ponto de apoio por uma haste rígida de comprimento l . O apoio é articulado, de modo que a massa pode movimentar-se em todas as direções, exceto é claro na direção própria da haste, pois ela não se deforma (vide a Figura 2.a).

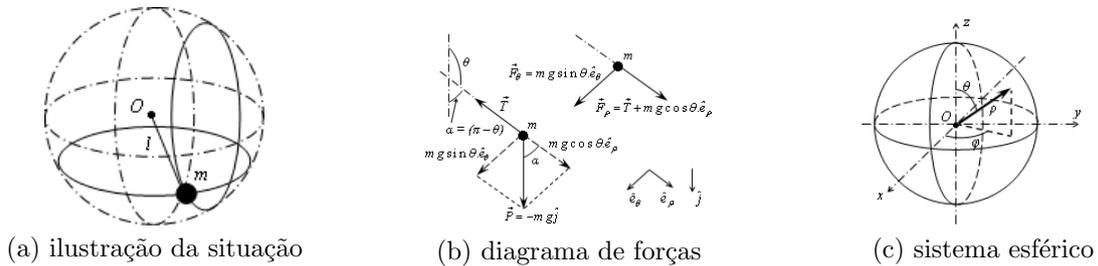


Figura 2: Pêndulo esférico, introdutório às coordenadas esféricas.

Convidamos o leitor a tentar, como exercício, escrever a 2ª Lei de Newton para o pêndulo em coordenadas cartesianas. A rigor isso é possível: a força-peso, como de hábito, só terá componente em \hat{k} , e a tração terá a direção da haste, com o sentido sempre para o ponto de apoio. À revelia das dificuldades que possam aparecer nesse procedimento, o fato de o pêndulo estar restrito a movimentar-se na superfície de uma esfera, devido ao vínculo materializado pela haste rígida, acrescido pela presença de uma força sempre com a mesma direção da haste, que é a tração, sugere que outro sistema de coordenadas possa ser mais útil.

Trata-se do sistema esférico, em que as coordenadas são ρ ($\rho \geq 0$), θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) e φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), como na Figura 2.c. Agora as direções básicas não são mais fixas no espaço: temos: \hat{e}_ρ , que é a direção do vetor posição, radial, apontando a partir do centro da esfera (apoio do pêndulo), \hat{e}_φ , que indica a variação do ângulo longitudinal, e \hat{e}_θ , direção do ângulo azimutal. Geometricamente é fácil encontrar a posição \vec{r} em função das coordenadas (ρ, θ, φ) e dos versores $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, de que se depreendem os versores esféricos⁴ formadores de uma nova base ortonormal $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$:

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \\ \hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \\ \hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{cases} \quad (4)$$

Pode ser diretamente averiguado, usando o produto escalar, que de fato os vetores acima formam uma base ortonormal do espaço, basta observar que a norma de cada um deles é unitária (daí serem chamados versores) e que são dois a dois ortogonais; como formam subconjunto em V^3 , constituem uma base. Além disso, na disposição em que foram apresentados no parágrafo acima, formam uma base positiva, como se pode ver por um simples produto vetorial, ou mais simplesmente pela orientação geométrica.

Graças a essas características, os vetores \vec{r} , \vec{P} e \vec{T} indicados na Figura 2 podem ser escritos sem qualquer prejuízo em termos da base esférica, em que as coordenadas deixam de ser as triplas (x, y, z) e passam a ser (ρ, θ, φ) . Apenas a título de exemplo, pode-se perguntar se esse novo sistema é sempre válido para descrição do movimento de uma partícula, ou seja, se a transformação $(x, y, z) \mapsto (\rho, \theta, \varphi)$ é inversível. É claro que ela o é na maior parte dos pontos do espaço, embora alguns exijam um cuidado extra, como veremos.

É mais fácil averiguar o contrário do que foi proposto, ou seja, se as funções $x = x(\rho, \theta, \varphi)$, etc., são inversíveis. Como vimos nos Prolegômenos, isto será suficiente para decidirmo-nos:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta \quad (5)$$

Vemos que o jacobiano anula-se para $\rho = 0$ ou $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Isso era esperado, pois as coordenadas θ e φ não são bem definidas caso $\rho = 0$. Igualmente, quando $\sin \theta = 0$, não se define φ . Ora, suponhamos que se queira impor uma definição para tais coordenadas nesses casos problemáticos. Ainda assim haverá problemas de continuidade, e por conseguinte de derivabilidade, na transformação entre os sistemas de coordenadas. Não entraremos em muitos detalhes matemáticos, mas permitimo-nos convidar o leitor a refletir em termos geométricos sobre o que ocorreria com o valor de φ e θ quando a partícula passasse pela origem. Faça-se o mesmo para quando, com $\rho > 0$ e para um φ qualquer, a partícula der uma volta azimutal completa.

O sistema esférico pode vir a ser capaz de descrever todo o espaço, como o cartesiano, mas claramente apareceriam descontinuidades na transformação deste naquele. Análises matemáticas mais profundas não são necessárias uma vez que já estão estabelecidos os casos problemáticos. Apenas uma nota: consideremos a função $\rho = \rho(x, y, z)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sem qualquer outro teste, já se poderia ter visto que essa função não é diferenciável na origem. Posteriormente, haverá situações em que seria muito conveniente à análise que as transformações entre referenciais sejam de classe C^2 , todavia está claro que nem sempre isso pode ser assegurado para todos os pontos do espaço, portanto deve o leitor acostumar-se à ideia de que alguns sistemas que viremos a usar são sádios apenas em algumas regiões do espaço e inapropriados em outras.

Como fica a 2ª Lei de Newton em coordenadas esféricas? Poder-se-ia pensar algo como $F_\rho = m\ddot{\rho}$, $F_\theta = m\ddot{\theta}$ e $F_\varphi = m\ddot{\varphi}$, por analogia com as (1), mas isso não é correto, pois o sistema dado por essas equações não é a Lei de Newton, mas sua tradução em coordenadas cartesianas, como foi deixado claro acima. Seguindo estritamente o enunciado dessa lei, lembrando que em esféricas $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho$ e considerando a massa constante:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m \frac{d^2}{dt^2} (\rho \hat{e}_\rho) \quad (6)$$

Tentando desenvolver a (6), logo obtém-se: $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho$, de que se percebe a necessidade de saber expressar a derivada temporal dos versores da base em função deles próprios.

⁴Para o leitor que não seja familiar a esse tipo de transição entre sistemas de coordenadas, sugerimos que estude por algum livro de mecânica que contenha esse tópico e que leia o Apêndice desta apostila.

Apenas a título de exemplo, encontremos \hat{e}_φ . Os outros casos podem ser feitos segundo o mesmo procedimento deste, sendo ainda mais simples e diretos.

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \Rightarrow \dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos \varphi \hat{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \hat{j} \quad (7)$$

Para as outras derivadas é possível identificar de imediato as componentes na base esférica e assim escrevê-las sem problemas em função dos versores $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$; neste caso um pouco mais de trabalho algébrico é necessário:

$$\begin{aligned} & -\cos \varphi \hat{i} - \sin \varphi \hat{j} = \\ & = -\cos \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \hat{i} - \sin \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \hat{j} + \sin \theta \cos \theta \hat{k} - \sin \theta \cos \theta \hat{k} = \\ & = -\cos \theta (\cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}) - \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) = \\ & = -\cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \theta \hat{e}_\rho \end{aligned} \quad (8)$$

Espera-se que o leitor faça os outros casos como exercício e assim possa verificar o resultado abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_\rho + \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\rho - \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_\theta \end{cases} \quad (9)$$

Agora já estamos prontos para desenvolver a (6), lançando mão das expressões nas (9) acima:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho (\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi) \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{\rho} (\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi) + \rho \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi) \quad (10)$$

As derivações exigidas acima são um tanto longas, embora não apresentem nenhuma dificuldade de cálculo. Obtendo o resultado desejado, escrevendo-o organizadamente:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 - \rho \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta} - \rho \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (\rho \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \theta + 2\rho \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{e}_\varphi \quad (11)$$

Vemos que a expressão da aceleração em coordenadas esféricas não é nada intuitiva e nem um pouco parecida com sua expressão no sistema cartesiano. Ora, a força total sobre a massa m do pêndulo, seja qual for, é um vetor de V^3 e portanto pode ser decomposta em componentes esféricas, daí finalmente teremos a 2ª Lei de Newton adaptada ao sistema presente de coordenadas:

$$\begin{cases} F_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 - \rho \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \\ F_\theta = m(\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta} - \rho \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \\ F_\varphi = m(\rho \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \theta + 2\rho \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \end{cases} \quad (12)$$

Vamos então tirar proveito das fórmulas hauridas. Embora seja muito esperado que o leitor não consiga reconhecer facilmente no que as (12) possam facilitar os cálculos, a prática com vários exercícios acaba por convencer-nos disso. Para o caso do pêndulo esférico que estamos tratando aqui, há dois graus de liberdade (três dimensões e o vínculo $\rho = l \equiv cte!$) e três equações (o sistema fornecido acima). Por esse motivo já sabemos de antemão que uma delas deverá ser trivialmente dispensável, fornecendo um resultado do tipo $0 = 0$. Se isso não ocorrer, é um indicativo de que há algum erro nas contas.

Seguindo a Figura 2.b, escrevamos a 2ª Lei de Newton em coordenadas esféricas, lembrando que a resultante \vec{F}_ρ é a força centrípeta, ou seja, $\vec{F}_\rho = -\frac{mv^2}{\rho} \hat{e}_\rho$, em que $v = \|\vec{v}\|$ é o módulo da velocidade da massa, $mg = \|\vec{P}\|$, e que $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ como consequência do vínculo.

$$\begin{cases} -l\dot{\theta}^2 - l\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = -\frac{v^2}{l} \\ m(l\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = mg \sin \theta \\ m(l\ddot{\varphi} \sin \theta + 2l\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Ora, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \rho \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi$. Neste caso particular $\dot{\rho} = 0$, portanto é verdade: $\frac{v^2}{\rho} = l\dot{\theta}^2 + l\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$. Assim, para a primeira das (13):

$$-l\dot{\theta}^2 - l\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = -l(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \Rightarrow 0 = 0 \quad (14)$$

Como era esperado. Novamente obtivemos as equações de movimento relevantes do sistema. Novamente, o problema está resolvido.

Entretanto, vale a pena continuar um pouco a análise das equações obtidas. Como será visto adiante, as Equações de Lagrange fornecem equações diferenciais de segunda ordem exatamente iguais às dadas pelo formalismo newtoniano, de modo que, neste caso, o fruto do emprego do método lagrangiano renderia as duas últimas (13); sua vantagem consiste em pular toda a parte de adequação da 2ª Lei de Newton ao sistema de coordenadas, pois as equações no formalismo lagrangiano são simétricas em relação a isso.

As (13) podem ser resolvidas numericamente, embora neste caso um procedimento padrão não seja realmente difícil. Trata-se de buscar por constantes do movimento e fazer uma análise qualitativa através delas. Por exemplo, se multiplicarmos a última das (13) por $\sin \theta$, logo se identifica uma derivada total em relação ao tempo:

$$ml(\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(ml \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow ml \sin^2 \theta \dot{\varphi} = k \quad (15)$$

em que $k \in \mathbb{R}$ é uma constante. Ora, mas o momento angular associado a φ é $p_\varphi = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$, então $k = \frac{p_\varphi}{l}$. Como l é constante, obtemos que o momento angular em φ conserva-se: $p_\varphi \equiv cte!$. Podemos agora substituir na segunda das (13) as expressões com $\dot{\varphi}$ por p_φ , tendo em vista que $\dot{\varphi}^2 = \frac{p_\varphi^2}{m^2 l^4 \sin^4 \theta}$:

$$m(l\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = mg \sin \theta \Rightarrow ml\ddot{\theta} - \frac{p_\varphi^2}{ml^3 \sin^3 \theta} \cos \theta - mg \sin \theta = 0 \quad (16)$$

A exemplo do que fizemos anteriormente, multiplicando a Equação (16) por $l\dot{\theta}$:

$$ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - \frac{p_\varphi^2}{ml^2 \sin^3 \theta} \cos \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{p_\varphi}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \right) = 0 \quad (17)$$

Ora, mas isso significa que, sendo $E \in \mathbb{R}$ uma constante:

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{p_\varphi}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \quad (18)$$

e reconhece-se E prontamente como a energia do sistema⁵, que se conserva. O que já obtivemos das equações de movimento do pêndulo esférico? O momento angular longitudinal, p_φ , conserva-se, ou seja, o pêndulo não pára de girar (o que era esperado, já que não há força na direção \hat{e}_φ , portanto não há torque em φ), e a energia é constante, de modo que podemos, a partir da análise dos valores de energia permitidos para o pêndulo, identificar posições e velocidades que o sistema pode e aqueles que ele não pode assumir.

Na Equação (18), o primeiro termo depende quadraticamente de uma velocidade, $\dot{\theta}$, enquanto que os dois últimos termos apresentam dependência apenas com uma coordenada, θ . Mesmo que o termo do meio refira-se a um tipo de energia cinética, sua dependência com uma coordenada e independência com velocidades tornam-no propício para ser posto em relações com posições, ou seja, englobaremos esse termo e a energia potencial (terceiro monômio) em um campo potencial, que costuma ser chamado de *potencial efetivo*.

$$V_e = \frac{p_\varphi}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \quad (19)$$

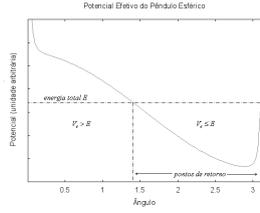
Rearranjando a expressão (18) para a energia total:

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + V_e \Rightarrow \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 = E - V_e \geq 0 \quad (20)$$

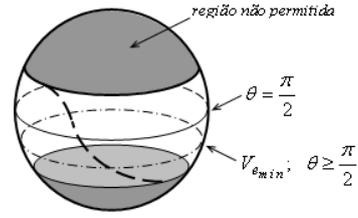
A partir dessa equação é, em princípio, fácil verificar quais regiões são permitidas para o pêndulo, em termos da coordenada angular, basta averiguar quais valores de θ satisfazem a $E \geq V_e$.

Embora não se possa resolver essa equação analiticamente, pode-se estudar o gráfico do potencial efetivo, confrontado com o valor de E , como na Figura 3.a da próxima página. É claro que se trata de um exemplo, pois a curva apresentada na figura tem seu formato determinado por todas as constantes da Equação 19, para as quais tomamos valores unitários a fim de ilustração. Ainda do gráfico, vemos que o movimento em θ é confinado entre dois pontos de retorno, nos quais se tem $E = V_e$, e entre eles há um poço de potencial, com um ponto de mínimo, isto é, de equilíbrio estável.

⁵Esse tipo de familiaridade com os conceitos físicos mais básicos, como energia, mesmo que escrita em termos dos momentos, pressupõe-se pré-requisito do leitor. Uma revisão pode ser feita com a [4].



(a) valores de energia permitidos para o sistema



(b) ilustração da trajetória do pêndulo

Figura 3: Análises factíveis a partir da Equação (20).

Na Figura 3.b está um esboço da trajetória do pêndulo para algum valor de energia que nos permite ter uma visualização simples do movimento. Sem necessidade de gráfico, já poderíamos ter verificado que o pêndulo não se aproxima indefinidamente de $\theta = 0$ ou de $\theta = \pi$, únicos pontos de divergência de V_e dentro de seu domínio.

Cabe a questão: isso é consequência da física do problema, ou é um resultado talvez artificial, advindo do fato de o sistema esférico empregado não ser bem definido para esses pontos? Bem, uma vez estabelecidas, as (13) são um sistema de equações diferenciais que por si só não tem nenhuma relação com a física anterior do problema, ou com o fato de estarmos em um ou em outro conjunto de coordenadas. Podendo atribuir valores iniciais às coordenadas e a suas derivadas, existe solução, a qual é indiferente às restrições que tínhamos, e sua análise fornece o que deverá, de fato e à revelia das coordenadas, acontecer.

1. Suponhamos inicialmente que não há nenhum instante em que $\sin \theta \neq 0$. Nesse caso não há dúvidas: a não ser que admitamos que o pêndulo tenha aparatado de $\theta = 0$ para $\theta = \pi$, ou vice-versa, precisaríamos admitir $\theta \equiv cte!$, portanto $\dot{\theta} = 0$, e todas as (13) forneceriam $0 = 0$. Não deixa de ser uma solução possível das equações, é claro, pois pode-se ter o pêndulo parado nas posições $\hat{l}\hat{j}$ ou $-\hat{l}\hat{j}$; acontece que o sistema esférico fica inadequado, afinal, quais valores atribuir a φ e a $\dot{\varphi}$?
2. Se, porém, houver pelo menos um instante em que é $\sin \theta \neq 0$, então a passagem (15) não traz perda de generalidade matemática nesse ponto e, como veremos a seguir, dada a continuidade esperada para p_φ e para $\sin \theta$ como funções do tempo (ver nota 8 à página 13), é suficiente para garantir a constância de p_φ . Fazamos $s(t) = \sin \theta(t)$ e $p(t) = p_\varphi(t)$.
 - (a) Se for $p(t) = 0$ quando $s(t) \neq 0$, então $p_\varphi \equiv 0$ é constante, já que $s(t) = 0 \Rightarrow p(t) = 0$. Ademais, nesse instante $\dot{\varphi} = 0$, e as (13) dão-nos também $\ddot{\varphi} = 0$, reduzindo-se às equações do pêndulo simples, que oscila em um plano. Independentemente da escolha das coordenadas, nesse caso o movimento não precisa mais ser confinado em θ , dependendo do valor da energia. Isso é claro da experiência quotidiana, e pode ser formalmente deduzido pelo mesmo método de análise de potencial a partir das equações de energia.
 - (b) Se porém $\exists \tilde{t}$ tal que $s(\tilde{t}) \neq 0$ e $p(\tilde{t}) = \tilde{p}_\varphi$, $\tilde{p}_\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pela continuidade de p sabemos que $\exists \delta > 0$; $p(t) \neq 0 \forall t \in [\tilde{t} - \delta, \tilde{t} + \delta]$. Como $p(t) \neq 0 \Rightarrow s(t) \neq 0$, s é não-nula nesse intervalo, portanto, da (15), $\frac{dp}{dt} = 0$ e $p \equiv \tilde{p}_\varphi$ em $(\tilde{t} - \delta, \tilde{t} + \delta)$. Ainda, se houver algum instante em que $\sin \theta = 0$, pela continuidade de s e sendo seu domínio um intervalo, haverá t_0 , $s(t_0) = 0$, tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t' \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tal que $s(t') \neq 0$ e (assumindo s.p.g. $t' > t_0$) $\forall t \in (t_0, t']$ verifica-se $s(t) \neq 0$. Assim sendo, dado qualquer δ' , escolhemos $\delta'' = \min\{\frac{\delta'}{2}, \frac{t' - t_0}{2}\}$ e certamente $s(t) \neq 0$ em $[t_0 + \delta'', t']$, portanto $p(t) = \tilde{p}_\varphi \forall t \in (t_0 + \delta'', t')$. Ora, $s(t_0) = 0 \Rightarrow p(t_0) = 0$, mas $\forall \delta' > 0 \exists t \in (t_0 - \delta', t_0 + \delta')$ com $p(t) \notin \left(-\frac{|\tilde{p}_\varphi|}{2}, \frac{|\tilde{p}_\varphi|}{2}\right)$, em contradição com a continuidade de p , basta pegar t em $(t_0 + \delta'', t_0 + \delta')$ se $t_0 + \delta' \leq t'$, ou em $(t_0 + \delta'', t')$ caso contrário. Absurdo! Segue que em nenhum momento ter-se-á $\sin \theta = 0$, ou seja, se for $p_\varphi \neq 0$, então também serão $\sin \theta \neq 0$ e $\dot{\varphi} \neq 0$ sempre, de onde toda a análise anterior decorre e conclui-se ser o movimento confinado, como havíamos previsto. Tal característica é uma consequência natural da física do problema, e graças a ela o sistema esférico apresenta-se adequado para descrição do movimento.

Resumindo: se o pêndulo for esférico em pelo menos um instante (isto é, tem movimento longitudinal, $p_\varphi \neq 0$), ele o será durante todo o movimento, que é sim confinado. Se ele não for esférico em algum momento, não o será jamais, então a situação física é outra e exige outra análise, possivelmente com outro sistema de coordenadas mais compatível. A lição importante é: para o pêndulo esférico, o sistema esférico não cria problemas e o movimento físico é de fato confinado.

2 Sistemas Incomuns de Coordenadas

2.1 Caso Menos Complicado

Toda a discussão acima pode parecer irrelevante aos olhos de alguns, afinal a intuição geométrica do problema do pêndulo esférico é bem simples. No entanto, nem sempre a simplicidade e a física andam juntas! Por isso mesmo, aproveitamos o caso fácil de ser compreendido geometricamente para ilustrar como é importante ter cuidado em manter-se dentro dos limites de validade das hipóteses de um problema; ademais, ilustramos como pode ser produtivo tentar entender o que acontece se elas forem relevadas ou ultrapassadas: acabamos por enxergar o pêndulo simples como um caso particular do esférico, para momento angular longitudinal nulo.

Dada a quantidade de vezes em que o autor e seus colegas já encontraram erros oriundos desse tipo de falta de cuidado (mesmo em livros-texto!), e sendo esta apostila introdutória, portanto destinada àqueles que mais cometem tais equívocos, pareceu-nos importante pelo menos em uma ocasião levantar a questão *será que isso vale?* e respondê-la com os devidos cuidados. Em contradição, doravante nem sempre seremos tão críticos quanto fomos na última subseção, pois nossa meta é introduzir as Equações de Lagrange antes da página 500. Como destacado nos Prolegômenos, a postura geral do resto do texto ater-se-á a descrições mais simples e objetivas das situações propostas, dando pouca atenção a pormenores.

O próximo caso a ser analisado é o seguinte:

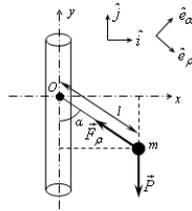


Figura 4: Sistema polar com origem móvel não-inercial.

Trata-se de uma massa m pendurada em uma haste de comprimento l , que se apoia sobre um suporte móvel O . O suporte sobe e desce em um trilho, sua posição dada por $x_O = 0$ e $y_O = A \cos(\omega t)$, em que $A, \omega \in \mathbb{R}$ são constantes, t é o tempo. Na figura está representado o sistema cartesiano. Com a base canônica do plano, $\{\hat{i}, \hat{j}\}$, a posição \vec{r} da massa é dada por $\vec{r} = \rho \sin \alpha \hat{i} + (y_O - \rho \cos \alpha) \hat{j}$, em que ρ é a distância de m ao suporte móvel O , neste caso $\rho = l \equiv cte!$, e α como na figura (definimos de forma que $-\pi < \alpha \leq \pi$). Os versores da nova base são dados, como de hábito, por⁶:

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j} \\ \hat{e}_\alpha = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right\|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j} \end{cases} \quad (21)$$

Verificar a ortonormalidade da base é trivial, basta aplicar o produto escalar aos vetores componentes. As coordenadas não serão mais (x, y) , porém (ρ, α) . Devido à presença do vínculo, como o movimento é bidimensional, há apenas um grau de liberdade, em outra palavras, vamos buscar a equação do movimento em α para solucionar o problema. Reescrevendo o vetor posição:

$$\vec{r} = A \cos(\omega t) \hat{j} + \rho \sin \alpha \hat{i} - \rho \cos \alpha \hat{j} = A \cos(\omega t) \hat{j} + \rho \hat{e}_\rho \quad (22)$$

Poderíamos começar a manipular o termo com \hat{j} , como fizemos no caso anterior, mas desta vez vamos aproveitar para expor um método mais dirigido de encontrar-se \hat{j} em função de \hat{e}_ρ e \hat{e}_α . Partamos das expressões inversas, dos versores da nova base em função dos da base canônica. Em formato matricial:

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\alpha \end{pmatrix} \quad (23)$$

Com um pouco de conhecimento de álgebra linear, reparando-se que o determinante da matriz rotação (como chamaremos a que multiplica os versores canônicos) é unitário, vê-se pela regra de Laplace que sua inversa é sua transposta. Mesmo sem esse conhecimento não é difícil inverter a Equação (23), obtendo:

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} \quad (24)$$

⁶Inserimos essa fórmula para enriquecimento do texto. As Equações (21) justificam-se conforme explicado no Apêndice.

Como este é o caso menos complicado, precisamos apenas do segundo versor: $\hat{j} = -\cos \alpha \hat{e}_\rho + \sin \alpha \hat{e}_\alpha$. Substituindo em \vec{r} na (22):

$$\vec{r} = [\rho - A \cos(\omega t) \cos \alpha] \hat{e}_\rho + A \cos(\omega t) \sin \alpha \hat{e}_\alpha \quad (25)$$

Antes de prosseguir, breves reflexões. Adotando o sistema em uso e tratando-o matematicamente, descobre-se que o único caso problemático para a inversibilidade da transformação entre ele e o sistema cartesiano é $\rho = 0$. Para um ponto de origem fixo, isso não é difícil de ser visto, mas pode vir a ser intrigante o fato de que a dependência temporal da origem O em nada influencia a inversibilidade da transformação.

Ora, imaginar o atual sistema e o cartesiano com origens movendo-se juntas, ou imaginá-los com origens fixas (quando este se torna o sistema polar) dá na mesma no que concerne às relações de um com o outro. Igualmente, dois sistemas cartesianos, um fixo e outro com origem móvel, também são bem relacionados; a transformação entre eles depende do tempo, é claro, mas esse é um parâmetro estranho às posições do plano, assim como qualquer constante aditiva, por exemplo. Relacionemos então o sistema atual com um cartesiano com a mesma origem, e este com o cartesiano fixo tomado inicialmente. Pronto. O raciocínio explica porque a dependência temporal $A \cos(\omega t)$ não tem influência sobre a questão da inversibilidade entre os sistemas.

O vínculo $\rho = l$ garante que não haverá problemas de inversibilidade (é mais do que pressuposto que $l > 0$), porém ainda se trata de um sistema não-inercial, já que o movimento da origem não é uniforme, portanto está de algum modo acelerado. Traduzir a 2ª Lei de Newton corretamente mais uma vez é agora o objetivo. Reparemos que, embora estejamos trabalhando com o auxílio de um sistema acelerado, abaixo mantemos \vec{r} em relação ao referencial inercial originalmente proposto, de modo a poder empregar corretamente as Leis de Newton. Primeiramente, já desenvolvendo as derivações:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= [\omega A \sin(\omega t) \cos \alpha + \dot{\rho}] \hat{e}_\rho + [-\omega A \sin(\omega t) \sin \alpha + \rho \dot{\alpha}] \hat{e}_\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\vec{r}} &= [\omega^2 A \cos(\omega t) \cos \alpha + \ddot{\rho} - \rho \dot{\alpha}^2] \hat{e}_\rho + [-\omega^2 A \cos(\omega t) \sin \alpha + \rho \ddot{\alpha} + 2\dot{\rho} \dot{\alpha}] \hat{e}_\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

Aplicando o resultado à situação em estudo, já com o vínculo, a 2ª Lei de Newton para o sistema fica:

$$\begin{cases} m [\omega^2 A \cos(\omega t) \cos \alpha - l \dot{\alpha}^2] = F_\rho \\ m [-\omega^2 A \cos(\omega t) \sin \alpha + l \ddot{\alpha}] = F_\alpha \end{cases} \quad (27)$$

Nas Equações (27), F_ρ e F_α são as componentes da força nas direções dos versores indicados pelos subíndices. Aqui faremos o contrário do que fizemos para o pêndulo esférico. Lá tínhamos dois graus de liberdade e três equações, então verificamos que uma delas reduzia-se à trivialidade. Aqui temos um único grau de liberdade, mas ainda duas equações de movimento, de forma que sabemos que uma delas não interessa, precisamos de apenas uma equação. Ora, $\vec{P} = -mg \hat{j} = mg \cos \alpha \hat{e}_\rho - mg \sin \alpha \hat{e}_\alpha$, de que $F_\alpha = -mg \sin \alpha$ (como antes, g é a magnitude da aceleração da gravidade). A equação do movimento será portanto:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g - \omega^2 A \cos(\omega t)}{l} \sin \alpha = 0 \quad (28)$$

O problema está resolvido. De quebra, ainda obtemos a expressão da força resultante na componente radial! No caso anterior, obtivemo-la sabendo que era a força centrípeta, agora podemos tentar identificar o que ela significa. Olhando a primeira das (27), vemos que se pode discriminar, em cada um dos termos do lado esquerdo, uma contribuição diferente: $ml\dot{\alpha}^2$ não deixa de ser um termo centrípeta, graças à haste que mantém o pêndulo a uma distância fixa da origem móvel; e $m\omega^2 A \cos(\omega t) \cos \alpha$, que se deve à imposição de aceleração pelo movimento do apoio na componente radial. Um observador postado na origem acelerada do sistema empregado observaria apenas a contribuição centrípeta, por estar igualmente submetido ao termo causado pela aceleração de O .

Ainda é possível encontrar a tração T na haste. Considerando as forças sobre a massa, na componente radial, tem-se: $F_\rho = mg \cos \alpha - T$, de que prossegue $T = m [g \cos \alpha - \omega^2 A \cos(\omega t) \cos \alpha + l \dot{\alpha}^2]$. Se estivermos construindo uma estrutura como na Figura 4, já saberemos como dimensionar a haste para que não quebre ou seja deformada durante o funcionamento do pêndulo! Pode parecer esquisito, mas tal construção existe, na entrada da cidade de São Paulo pela via Bandeirantes, em um painel luminoso, fazendo propaganda de algum produto.⁷

⁷Apenas para registrar, tal forma de publicidade deveria ser proibida, pois foi extremamente eficaz em reter a atenção dos motoristas (no caso do próprio autor) e conseqüentemente desviá-la da autoestrada. Se serve de consolo, o autor prestou muita atenção no formato do anúncio, mas não faz a mínima ideia do que estava sendo anunciado.

O problema poderia ter sido resolvido no sistema cartesiano habitual, mas então encontrar a força radial não teria sido uma consequência dos cálculos, porém uma tarefa bastante intrincada. Apareceriam componentes da tração em ambas as direções \hat{i} e \hat{j} e nas respectivas equações, de modo que forçosamente precisaríamos dela para chegar à solução. A grande vantagem do sistema adotado é que essa força desconhecida aparece em apenas uma componente, desacoplando as equações de movimento no que tange à tração e permitindo-nos resolver ao menos uma delas ignorando os efeitos da força de vínculo, e assim finalmente determinar completamente a situação, já que é possuidora de um único grau de liberdade.

Como último comentário, este é um caso típico em que as dependências total e explícita das quantidades com um parâmetro são fáceis de visualizar e são diferentes, em valor e significado, sendo o exemplo que não foi dado nos Prolegômenos quando se falou disso. Estamos falando especificamente da coordenada y da massa m , $y = A \cos(\omega t) - \rho \cos \alpha$. Sendo uma posição, a derivada total $\frac{dy}{dt}$ indica a velocidade da partícula na direção \hat{j} , enquanto que a derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial t}$ evidentemente não é nenhuma velocidade da massa, embora neste caso em particular coincida com a velocidade da origem O . Além do mais, $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} - \dot{\rho} \cos \alpha + \rho \dot{\alpha} \sin \alpha$. Mesmo que $\dot{\rho} = 0$, o outro termo não é nulo, daí $\frac{dy}{dt} \neq \frac{\partial y}{\partial t}$.

2.2 Caso Mais Complicado

Com os últimos exemplos, esperamos ter mostrado que já é um feito importante ter chegado ao equacionamento na forma diferencial de um sistema físico. A Equação (28), por exemplo, pode ser resolvida com muita simplicidade com algoritmos numéricos bastante conhecidos, como o método de Runge-Kutta. Com um formalismo mais desenvolvido, talvez poder-se-ia torná-la uma expressão na forma integral, cuja resolução numérica é igualmente fácil (mas não iremos tão longe nesta apostila). Enfim, de posse da (28), o problema pode *realmente* ser considerado resolvido.

As formas de prosseguir, sem recorrer a um computador, a partir da equação diferencial são várias: séries de funções, transformadas, tentativas de análises como fizemos na Seção 1.3, métodos heurísticos, aproximações sucessivas, etc. Em resumo: sabemos nos virar tendo a equação de movimento, de modo totalmente correto, mesmo que talvez não de forma absolutamente precisa.

Antes de chegar ao ápice desta apostila e iniciar a construção do formalismo lagrangiano, queremos propor uma última situação (cujo desenvolvimento em detalhes será propositalmente omitido), símbolo por um lado do procedimento profícuo que adotamos para lidar com as situações físicas, e por outro lembrança de como os desenvolvimentos matemáticos para adequação da 2ª Lei de Newton podem vir a ser laboriosos.

Consideremos a figura a seguir, em que há duas massas, m_1 e m_2 , unidas por uma haste:

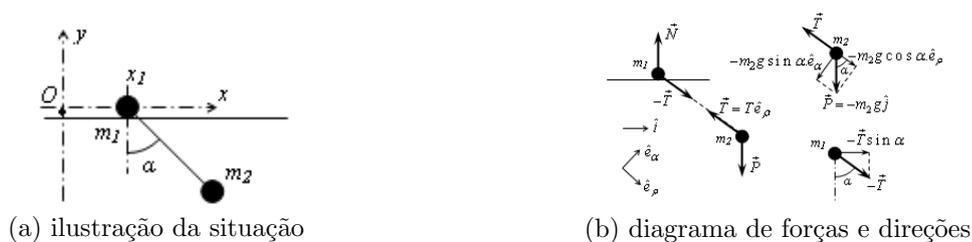


Figura 5: Movimento de partículas acopladas.

O sistema tem dimensão 4, afinal, trata-se de duas partículas movimentando-se no plano, de que é esperado serem necessárias quatro coordenadas para descrição total: (x_1, y_1) para a primeira massa e (x_2, y_2) para a segunda. No entanto, há dois vínculos: $y_1 = 0$, ou seja, m_1 apenas deslizará na horizontal, e $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = l \equiv \text{cte!}$, o que significa que a haste tem comprimento l e é rígida, mantendo as massas a uma distância fixa uma da outra.

Desta vez apareceu um vínculo diferente dos anteriores, que apenas tornavam coordenadas constantes. De fato, as equações de vínculos podem ser de muitos formatos diferentes, e nem sempre é possível empregá-las diretamente, por exemplo quando envolvem velocidades e coordenadas misturadas. No presente problema, entretanto, uma mudança de sistema de coordenadas não só tornará o segundo vínculo extremamente simples, tal qual o primeiro, como também trará os benefícios já comentados anteriormente. Faremos como no caso anterior, com uma pequena diferença, como mostra a Figura 5.b.

Novamente poremos a origem em um ponto possivelmente móvel, a saber, a partícula de massa m_1 , só que desta vez seu movimento será na horizontal, e não na vertical, e não será uma imposição do problema, mas algo a ser determinado. Todo o resto será análogo ao caso recém-estudado.

Temos no sistema cartesiano inercial: a posição da primeira partícula $\vec{r}_1 = x_1 \hat{i}$ e a da segunda $\vec{r}_2 = (x_1 + l \sin \alpha) \hat{i} - l \cos \alpha \hat{j}$. Aproveitando as transformações deduzidas anteriormente, exibidas nas Equações (23) e (24), imediatamente: $\vec{r}_2 = (x_1 \sin \alpha + l) \hat{e}_\rho + x_1 \cos \alpha \hat{e}_\alpha$ (a única coisa que fizemos para chegar a esse resultado foi reconhecer o vetor $l \hat{e}_\rho$ e expressar o termo restante com \hat{i} em versores polares). Para a partícula 1 usaremos o sistema antigo, afinal sua posição no novo será sempre o vetor nulo, e o cartesiano é-lhe naturalmente apropriado.

Seguindo pelo método habitual, deve-se chegar a $\ddot{r}_2 = (\ddot{x}_1 \sin \alpha - l \dot{\alpha}^2) \hat{e}_\rho + (l \ddot{\alpha} + \ddot{x}_1 \cos \alpha) \hat{e}_\alpha$. Ora, sobre a partícula 2 atua a força-peso $\vec{F}_2 = -m_2 g \hat{j} = m_2 g \cos \alpha \hat{e}_\rho - m_2 g \sin \alpha \hat{e}_\alpha$ e a tração $T \hat{e}_\rho$. Sobre a partícula 1 atuam forças verticais que se cancelam e a única força horizontal é uma componente da tração. Podemos fazer a decomposição de forças de outra maneira: sobre m_2 atua uma força radial dada por $T + m_2 g \cos \alpha$, e outra na direção \hat{e}_α , dada por $-m_2 g \sin \alpha$. Sobre m_1 atuam forças que não interessam, por serem na direção \hat{j} , o que não alterará o vínculo $y_1 = 0$, e a única em uma direção alternativa é a reação à massa m_2 , $-T \hat{e}_\rho = -T(\sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j})$. Apenas importa a contribuição horizontal $-T \sin \alpha$.

Por motivos de economia, não estamos fornecendo os detalhes de todos os resultados acima, pois são obtidos de forma idêntica ao que foi feito na subseção anterior. Lembramos entretanto as relações $\hat{e}_\rho = \dot{\alpha} \hat{e}_\alpha$ e $\hat{e}_\alpha = -\dot{\alpha} \hat{e}_\rho$. Lembramos também que os vetores-posição de ambas as partículas continuam escritos em termos de um referencial inercial (apesar da variedade dos sistemas de coordenadas utilizados). Vamos então escrever a 2ª Lei de Newton. No sistema abaixo, a primeira das equações é a lei aplicada à partícula 1, e as duas seguintes à 2:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -T \sin \alpha \\ m_2 (\ddot{x}_1 \sin \alpha - l \dot{\alpha}^2) = T + m_2 g \cos \alpha \\ m_2 (l \ddot{\alpha} + \ddot{x}_1 \cos \alpha) = -m_2 g \sin \alpha \end{cases} \quad (29)$$

O problema ainda não está resolvido! Do ponto de vista matemático, não há muito mais que necessite ser feito, pois há três equações e três funções desconhecidas: os dois graus de liberdade do sistema e a força de vínculo. É possível encontrar as soluções de cada uma delas, mesmo que numericamente, e ter-se-á a descrição completa do movimento. No entanto, do ponto de vista da física é de um interesse sutil eliminar as forças de vínculo das equações, justamente porque em geral são quantidades incógnitas.

No caso do pêndulo esférico, havia duas equações livres do termo de vínculo, correspondentes aos dois graus de liberdade da situação. Se não soubéssemos *a priori* como era a força centrípeta naquele caso (vantagem que usamos didaticamente para mostrar que uma das equações deveria ser identicamente satisfeita), poderíamos tê-la usado para descobrir. Foi exatamente o que fizemos na Seção 2.1, o caso anterior, em que, com o sistema de coordenadas adotado, desacoplaram-se as equações, de uma delas tínhamos a descrição do sistema dinâmico e da outra a força de tração na haste. Em qualquer um dos casos era possível resolver as equações considerando o vínculo uma função a ser determinada, mas fizemos questão de separá-lo daquilo que nos daria puramente o movimento.

Neste caso, mesmo com a escolha de coordenadas, continuamos tendo um acoplamento de duas equações com a tração T desconhecida. Este é um exemplo simples de tratar, basta uma substituição algébrica trivial e algumas considerações, a título de aprendizagem para o leitor. Porém, se fosse algo mais complicado, poderíamos ter problemas para desacoplar as equações com a força de vínculo. Veremos posteriormente a importância de tal consideração para o formalismo lagrangiano.

Voltando à situação em análise, as (29) não impõem dificuldades: basta multiplicar a segunda delas por $\sin \alpha$ e, fazendo uso da primeira, obtém-se uma equação somente com as funções x_1 e α , que era o objetivo. Com o novo resultado, mais a terceira das (29), ficamos com duas equações para o movimento, das quais se determinam as coordenadas necessárias, e sobra uma relação para a força radial de vínculo.

Sempre pode-se efetuar a multiplicação por $\sin \alpha$? Sim, isso não gera perda de generalidade. Caso seja $\sin \alpha \neq 0$, não há dúvidas. Mesmo que se tenha em alguns instantes $\sin \alpha = 0$, o resultado continua válido, pois ele o era para instantes imediatamente antes e depois desses, portanto, pela continuidade esperada de α , sê-lo-á nesses tempos em particular⁸. Se for sempre (entenda-se, em um intervalo contínuo de tempo) $\sin \alpha = 0$, então a resposta da equação já está determinada e α será uma constante, sendo esse um resultado possível, embora trivial. Apenas para não deixarmos nosso último problema em mecânica newtoniana sem sua muito devida conclusão:

$$\begin{cases} m_2 \sin \alpha (\ddot{x}_1 \sin \alpha - l \dot{\alpha}^2 - g \cos \alpha) = -m_1 \ddot{x}_1 \\ l \ddot{\alpha} + \ddot{x}_1 \cos \alpha = -g \sin \alpha \end{cases} \quad (30)$$

Finalmente, dispondo das equações acima, encerramos a questão. O problema está resolvido.

⁸As respostas a equações diferenciais são funções contínuas, como devem ser *todas* as equações de movimento clássicas.

3 Sistema de Coordenadas Generalizadas

3.1 Considerações Iniciais

Recapitulando o que foi feito por ora: revimos o enunciado original da 2ª Lei de Newton e interpretamo-lo da forma mais geral possível, ou seja, sem usar nenhum sistema de coordenadas primordial. Para torná-la operacional, entretanto, tais sistemas são necessários, e vimos logo que o cartesiano é um candidato natural para que se escreva a 2ª Lei de forma simples, o que de fato ocorre, em princípio. Contraditoriamente, a variedade de situações físicas a que se quer aplicar tal lei rompe com a simplicidade das equações cartesianas, pois a decomposição das várias forças e trajetórias envolvidas torna-se complicada usando os versores da base canônica e as coordenadas do espaço cartesiano, de que surge o emprego de sistemas alternativos.

Experimentamos alguns deles, e cada um, dadas suas peculiaridades, exigiu tipos de análise diferentes, quer-se dizer, necessita de que adaptemos a 2ª Lei de Newton de forma apropriada, o que é trabalhoso, e ainda assim pode incorrer em problemas. Desenvolvemos com o sistema esférico o método que empregamos repetidamente para encontrar a expressão correta da 2ª Lei para cada conjunto de coordenadas e bases, e além disso vimos que determinado sistema pode funcionar em uma situação e região específicas mas não em todos os casos, ao contrário do cartesiano. Com os exemplos seguintes, percebemos outras nuances contidas nas leis básicas da mecânica: no caso da Seção 2.1, identificamos termos adicionais que aparecem nas equações de movimento devido ao fato de usar-se um referencial não-inercial e tivemos a oportunidade de experimentar as facilidades de sistemas em que as forças de vínculo são facilmente eliminadas da resolução do problema; já o último exemplo foi um protótipo de como as forças de vínculo desconhecidas poderiam vir a perturbar a solução das equações de movimento, pois não conseguimos, apenas com um sistema bem ajustado, desacoplar todas as equações diferenciais com tais componentes. Ao chegar ao fim desse último caso, também já havíamos tido contato com a questão de movimentos acoplados de duas partículas, de forma bastante leviana, é verdade, mas suficiente para ilustrar algumas considerações sobre formas mais ou menos vantajosas de decompor-se as forças presentes e dos sistemas de referência adotados para cada uma das partículas.

Como recompensa por todo o trabalho, acumulamos alguma experiência, da qual destacamos dois tópicos (além de alguns macetes que possamos ter usado para detalhes no meio das contas): ficamos habituados a transitar entre diversos sistemas de coordenadas e a descrever situações nos sistemas mais vantajosos, e temos em mente claros os problemas oriundos do estudo de situações mais complexas, que são a adaptação das Leis de Newton a cada caso em particular e a forma de lidar apropriadamente com os vínculos.

O passo mais natural a ser dado neste instante, e também o mais importante, é procurar generalizar a metodologia que empregamos para adaptar a 2ª Lei, de forma que, ao depararmos com um novo sistema, tenhamos pronto um algoritmo que ensine como a partir dele chegar às equações de movimento. Desse esforço sairão as Equações de Lagrange, e pode-se acrescentar, mesmo que precocemente, que elas representam muito mais do que a busca inicial por equações invariantes por sistemas de coordenadas: delas frutificam desenvolvimentos posteriores extremamente importantes e por vezes inesperados da mecânica clássica. Isso tudo não será abordado neste texto, mas, para não ficar em dissonância com outras obras, convém uma satisfação ao leitor.

Existe outra forma de construir-se o formalismo lagrangiano, além daquela exposta nas próximas páginas. Acontece que a problemática das forças de vínculo pode ser tão indesejável quanto a de ter que tratar cada sistema de forma diferente, no formalismo dito newtoniano. Como não poderia deixar de ser em ciência, tal barreira levou a esforços para suplantá-la, dos quais nasceu o *Princípio de d'Alembert*, que consiste em uma maneira de escrever-se a 2ª Lei de Newton considerando apenas forças aplicadas externamente sobre as partículas, omitindo-se as forças de vínculo.

O Princípio de d'Alembert⁹ tem utilidade prática restrita, pois tirando o fato de podermos ignorar as forças internas do sistema, em geral desconhecidas, exprimir um sistema dinâmico usando a equação derivada desse princípio é mais complicado do que meramente a 2ª Lei, sem contar com o fato de serem empregados dois conceitos um tanto abstratos de mecânica, *deslocamentos* e *trabalho virtuais*. Por último, o Princípio de d'Alembert depende de uma hipótese feita sobre os trabalhos virtuais exercidos pelas forças de vínculo para ser validado, e nem todos os sistemas (embora muitos deles) satisfazem a essa hipótese.

Indo por esse caminho, a introdução de coordenadas generalizadas para possibilitar o emprego do supracitado acaba levando, de uma forma bastante diferente, às mesmas Equações de Lagrange a que chegaremos de forma menos rápida, porém, na opinião pessoal do autor, mais simples em alguns aspectos.

⁹Uma introdução clara ao Princípio dos Trabalhos Virtuais e, posteriormente, ao Princípio de d'Alembert, pode ser encontrada na [5]. Essa mesma referência constrói o formalismo lagrangiano a partir daí, e não como faremos a seguir.

A opção do autor por seguir um caminho diferente deve ficar clara¹⁰. O outro modo possibilita estender o formalismo lagrangiano a consequências importantes, mas, por tratar-se de um texto introdutório, cremos ser muitíssimo útil contornar os conceitos de trabalho e deslocamento virtuais, mesmo porque trata-se de quantidades infinitesimais, e não trabalhamos com o infinitésimo de forma natural em nossa tradição matemática; sem contar que temos um compromisso com a fluidez das ideias e estamos muito perto de construir corretamente o novo formalismo, seria portanto contraproducente levar a cabo uma divergência para explicar e justificar o Princípio de d'Alembert. Todas as hipóteses necessárias para a erigão do formalismo de Lagrange desse jeito serão forçosamente feitas aqui, e nenhuma a mais, de modo que os resultados a que chegaremos são tão gerais quanto os obtidos por outros autores.

Por último, como já sabemos que o sistema cartesiano com origem fixa vale para qualquer situação que queiramos descrever, utilizá-lo-emos como lastro para o desenvolvimento subsequente, o que não acarreta perda de generalidade ao que será feito, é claro, pois os vetores envolvidos não dependem do sistema de coordenadas, e a 2ª Lei é plenamente aplicável uma vez que supomos o referencial não-inercial. É possível, embora desnecessário, através de outras construções deduzir as Equações de Lagrange diretamente para quaisquer coordenadas. De todo modo, não dependeremos das cartesianas senão para a clareza do texto.

3.2 Coordenadas e Velocidades Generalizadas

Consideremos um sistema físico qualquer, composto por n partículas. No caso mais geral possível, cada partícula pode mover-se em três dimensões, portanto temos um sistema $3n$ -dimensional, com $3n$ coordenadas. Seja $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Associa-se à i -ésima partícula o vetor posição $\vec{r}_i = x_{1i}\hat{i} + x_{2i}\hat{j} + x_{3i}\hat{k}$, em que (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) são as coordenadas cartesianas pertinentes, tomadas em um referencial inercial.

Definidas as coordenadas, não precisamos mais dos vetores-posição para determinar a configuração do sistema, mas tão-somente da família de $3n$ funções x_k , com $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$; estipulamos, em prol da notação, uma bijeção arbitrária $k \leftrightarrow li$, $l \in \{1, 2, 3\}$. Havendo um outro sistema de coordenadas, dado pela família de funções q_k , diremos que as q_k são *coordenadas generalizadas* do sistema se:

$$\begin{aligned} q_k &= q_k(x_1, x_2, \dots, x_{3n}; t) & \forall k \in \{1, 2, \dots, 3n\} \\ x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) & \forall k \in \{1, 2, \dots, 3n\} \end{aligned} \quad (31)$$

Em outras palavras, todas as q_k são dadas como função das x_k e eventualmente como função explícita do tempo, e reciprocamente todas as x_k podem ser escritas como função das q_k e talvez do tempo. Se o jacobiano da transformação $x_k \mapsto q_k$ for não-nulo, a inversibilidade do sistema está assegurada.

Daqui por diante, vamos usar apenas coordenadas generalizadas para nossos interesses de análise. Além do que foi dito acima (que basicamente diz que as q_k podem ser usadas como coordenadas), ainda não foi feita nenhuma hipótese sobre elas, de modo que podemos escolher o conjunto de coordenadas mais útil, ou qualquer outro que quisermos, para qualquer sistema. As q_k isoladamente não se referem mais à posição das n partículas; com efeito, são apenas um conjunto de funções biunívocas das coordenadas cartesianas.

Assim como os vetores \vec{r}_i podem ser agora expressos em termos das coordenadas generalizadas, também o podem as velocidades \vec{v}_i em termos das *velocidades generalizadas* \dot{q}_k :

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (32)$$

Podemos reparar facilmente que o que fizemos várias vezes nos exemplos acima é basicamente o que está sendo escrito em linguagem geral aqui: escrever o vetor posição nas novas coordenadas e derivá-lo em relação ao tempo sucessivamente. Tomemos um único exemplo e apliquemos a Equação (32) às coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) \hat{j} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (33)$$

Detalhes da última passagem podem ser omitidos, embora valha a pena lembrar que $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$. Sugerimos, como exercício, que o leitor aplique o resultado (32) a outros casos e convença-se de que não estamos fazendo nada de substancialmente novo; assim sendo, pode-se aproveitar e verificar-se explicitamente que, em todos os casos, a velocidade tem dimensão da grandeza física velocidade, sejam quais forem as dimensões das velocidades generalizadas.

¹⁰A [2] procede quase como nós, porém não a recomendamos neste aspecto, pois seu desenvolvimento é confuso e ela utiliza de forma obscura o conceito de trabalho virtual para algumas justificativas.

Isso é esperado, pois a natureza dos vetores independe das coordenadas, de forma que mesmo em função de coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais, a dimensão de \vec{v}_i deve ser como em cartesianas. Reparemos que as dimensões de cada q_k não precisam ser métricas, podendo ser qualquer coisa, de modo que as \dot{q}_k isoladamente também não precisam ser velocidades. Se a coordenada generalizada for um ângulo por exemplo, sua derivada temporal, a velocidade generalizada, será uma frequência angular.

Façamos uma observação em relação a dependências funcionais. Admitindo serem as coordenadas generalizadas mutuamente independentes, temos que $\forall i, l \in \{1, 2, \dots, 3n\}$, $\frac{\partial q_i}{\partial q_l} = \delta_{l,i}$, o que é lugar-comum. Mas o que ocorre com $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_l}$? Ora, \dot{q}_i é função das mesmas variáveis que q_i , como já mostramos, mas não o é de nenhuma q_l (pelo menos não explicitamente), conseqüentemente a derivada parcial anterior é nula para cada i e l . Uma decorrência notável é a seguinte identidade:

Proposição 1: Seja f uma função de $(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$, $n \in \mathbb{N}$, f de classe C^2 , com as variáveis x independentes entre si, mas possivelmente dependentes de t . Nessas condições, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{df}{dt} \right)$$

Demonstração: Faça-se, na ordem: a Regra da Cadeia, a observação acima e o Teorema de Schwarz.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \dot{x}_l + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \dot{x}_l + \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} \dot{x}_l + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Posteriormente precisaremos do resultado acima. Assim que esbarrássemos com o problema, seríamos impelidos a buscar essa demonstração, porém, por motivos de organização, pareceu melhor já apresentá-la aqui. Uma outra identidade, bem mais imediata, é:

Proposição 2: Seja f função diferenciável de x_i e t , com i definido na proposição acima. Se para todo i for x_i uma função apenas de t , então:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}_i} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Demonstração: Tendo em conta que $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \delta_{l,i}$ por causa da mútua independência das variáveis x_i , e que f não depende de \dot{x}_i , bem como suas derivadas parciais, segue:

$$\dot{f} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \dot{x}_l + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \delta_{l,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

No contexto em que estamos trabalhando, se não houver dependência entre as coordenadas (em outras palavras, se não houver vínculos no sistema), então $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k}$.

3.3 Energia Cinética e Momentos Generalizados

A energia cinética de um sistema é dada normalmente por $T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$, com m_i a massa da i -ésima partícula. Com auxílio da (32), obtém-se:

$$\vec{v}_i^2 = \left(\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^{3n} \sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (34)$$

em que o ponto \cdot é a notação empregada para produto escalar entre os vetores. Conclui-se que a energia cinética, que na forma a seguir chamaremos de *energia cinética generalizada*, é:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^{3n} \sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + 2 \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (35)$$

A expressão para a energia cinética é pouco econômica, embora quando as coordenadas generalizadas não dependam do tempo ela se simplifique grandemente e venha a ser útil.

Já para a generalização dos momentos, é necessário ir mais além. Tem-se que abandonar a quantidade de movimento como tomada na mecânica newtoniana, afinal ela não é suficientemente geral: para algumas interações é relevante o momento como linear, para outras como angular, isto é, não há uma formulação maior de momento, que pudesse ser reduzida a tais quantidades conforme o caso. Como as coordenadas generalizadas podem ter naturezas quaisquer, não é apropriado associar momento linear ou angular a cada uma delas; por outro lado, a definição geral que procuramos deve reduzir-se a momento angular quando a coordenada generalizada for, por exemplo, um ângulo, e a linear, quando a coordenada for, por exemplo, cartesiana.

Para motivar uma nova definição de momento, façamos rápidas observações sobre coordenadas cilíndricas, que apresentam componentes métricas (uma delas cartesiana) e angulares. Nesse sistema, trabalha-se com (ρ, θ, z) , em que ρ e θ são como no sistema polar, e z é como a coordenada \hat{k} cartesiana. Esse sistema mistura um pouco dos dois mais comuns, por isso a partir dele é fácil ter alguma idéia de como redefinir momento. Vamos encontrar a energia de uma partícula livre de massa m e posição \vec{r} , guiados pela energia cinética generalizada:

$$\vec{r} = \rho \cos \theta \hat{i} + \rho \sin \theta \hat{j} + z \hat{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \hat{i} + \rho \cos \theta \hat{j} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k} \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0 \quad (36)$$

Enumerando as coordenadas de 1 a 3 e fazendo os produtos escalares, sobra imediatamente que, se $k \neq l$, então $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = 0$, portanto, pela Equação (35), tem-se:

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \quad (37)$$

É fácil observar que cada um dos três termos acima refere-se, respectivamente, a deslocamentos nas componentes ρ , θ e z . Conjuntamente, os momentos lineares associados a deslocamentos da partícula só em ρ e só em z , assim como o momento angular associado ao movimento em θ , como se em torno de um eixo fixo, todos em módulo, são¹¹:

$$p_\rho = m\dot{\rho} \quad p_z = m\dot{z} \quad p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} \quad (38)$$

As seguintes relações são observadas:

$$p_\rho = m\dot{\rho} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \quad p_z = m\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \quad p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \quad (39)$$

Igualmente para outras coordenadas observam-se relações análogas. Finalmente, define-se de forma bastante sugestiva o que serão os *momentos generalizados*¹²:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (40)$$

É muito importante diferenciar as generalizações anteriores da última que fizemos. Como insistimos, as velocidade e as posições das partículas continuam com as mesmas naturezas e dimensões normais, pois apenas foram reescritas em termos de outras quantidades, que são as coordenadas e velocidades generalizadas. Para a energia cinética fizemos menos ainda, apenas pusemo-la em função das novas coordenadas e suas derivadas, e à expressão resultante chamamos energia generalizada, embora nada de novo tenha sido acrescentado (é bem verdade que no formalismo lagrangiano não se usam vetores, mas coordenadas e suas derivadas, portanto a fórmula (35) permite dispensar as posições e as velocidades em si, as quais não terão mais importância, e daí sua relevância).

De fato, os antigos momentos tornaram-se obsoletos (como falar de momento angular sem produto vetorial?, por exemplo), então generalizá-los não seguiu a ideia das outras grandezas. A nova definição justifica-se por, em primeiro lugar, reduzir-se a componentes de momento linear e angular nos casos simples e conhecidos e, posteriormente, em um formalismo que não será aqui abordado, por adquirir a mesma importância das coordenadas generalizadas.

¹¹A referência [4], por ser um livro de introdução à mecânica newtoniana, traz com riqueza de detalhes a definição dos momentos linear e angular, e ainda algumas discussões sobre ambas as grandezas.

¹²A referência [6] utiliza a função lagrangiana, que ainda não definimos, e não a energia cinética para definir o momento generalizado. Nossas definições são equivalentes em certa circunstância, como veremos posteriormente.

Ainda assim, os novos momentos não são extensões dos antigos! Basta tomar o sistema polar como ilustração: o momento linear, expresso em termos de ρ e θ é (peguemos a partícula do último exemplo):

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = m\dot{\rho}\hat{e}_\rho + m\rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (41)$$

pois em polares $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho$ e $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$. Neste caso bidimensional, abusaremos do produto vetorial, o qual daremos como um módulo, com $\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\rho = 0$ e $\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\theta = 1$. O momento angular será:

$$l = \vec{r} \wedge \vec{p} = \rho\hat{e}_\rho \wedge m\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\hat{e}_\rho \wedge m\rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta = m\rho^2\dot{\theta} \quad (42)$$

Enquanto isso, os momentos generalizados são (basta utilizar a (37) ignorando o último termo):

$$p_\rho = m\dot{\rho} \quad p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} \quad (43)$$

Quebrando expectativas, não há uma correspondência rígida entre as componentes, módulos, ou o que seja dos momentos linear e angular com os generalizados, embora seja bom reparar que o momento associado a ρ , coordenada linear, é a componente da quantidade de movimento linear em \hat{e}_ρ , e aquele associado a θ , coordenada angular, é a componente da respectiva quantidade angular¹³.

Queremos enfatizar que o momento generalizado foi *definido*, e não deduzido de alguma forma. Por último, na formulação newtoniana, a 2ª Lei afirma que a força aplicada sobre uma partícula é a variação do momento linear, $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. Queremos verificar se, na formulação lagrangiana de coordenadas generalizadas, com o momento generalizado recém-definido, essa afirmação continua de algum modo verdadeira.

3.4 Força Generalizada e 1ª Equação de Lagrange

Escrever o vetor momento linear em termos das coordenadas e velocidades generalizadas e igualar sua derivada temporal à força total atuante sobre as partículas não é em absoluto construir um novo formalismo; isso nada mais seria do que uma receita genérica para o trabalho que fizemos nos exemplos acima, continuaríamos pois com os mesmos inconvenientes, em especial com a dificuldade de escrever-se a força total em termos das novas coordenadas e lidar com forças de vínculo.

A indagação com que fechamos a última seção diz respeito a momentos generalizados, e é neste momento em que, se bem sucedidos, poderemos abandonar totalmente os vetores e trabalhar apenas com grandezas escalares, o que é muito mais cômodo. Primeiramente, vamos supor que o sistema de n partículas tenha s graus de liberdade ($s \leq 3n$); sejam as coordenadas generalizadas necessárias q_k , com $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Pois então, avaliemos o que seria a derivada temporal do momento generalizado:

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] \quad (44)$$

Como já estamos contando estritamente as coordenadas necessárias, as q_k são mutuamente independentes (supomos que os vínculos sejam tais, que seja possível expressar a posição das partículas apenas com as s coordenadas independentes¹⁴), porém dependentes do tempo. Nesse caso aplica-se a Proposição 2 à Equação (44):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \right) \quad (45)$$

Vamos também requerer que \vec{r} seja função de classe C^2 das coordenadas generalizadas e do tempo. Dessa forma, o último termo do desenvolvimento acima é facilmente reconhecível, com auxílio da Proposição 1 (já temos garantido que não existe interdependência entre as variáveis q_k):

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (46)$$

Falta elaborar o penúltimo termo da (45), o que não será imediato. De pronto reconhece-se $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$, em que \vec{F}_i é a força total sobre a i -ésima partícula.

¹³Nenhuma das considerações acima refere-se à relação $\vec{p} = \nabla T$, válida em quaisquer sistemas de coordenadas. (Vide Seção 3.6 para a notação ∇).

¹⁴De fato, em um sem-número de aplicações esse é o caso. É possível estender o formalismo de Lagrange a situações em que tal feito seja impraticável, mas isso já não é assunto para um material introdutório.

Tomemos a definição de trabalho de força, na forma diferencial: $d\tau_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$. Podemos então reescrevê-la em função das coordenadas generalizadas, estendendo para todo o sistema:

$$d\tau = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \right) \quad (47)$$

Não fosse a contribuição da dependência explícita com o tempo, teríamos achado o penúltimo termo da (45) (ou algo muito próximo) na Equação (47). Vamos então propor o seguinte: as forças sobre as partículas podem ser decompostas como a soma das forças externas sobre elas, \vec{F}_i^e , mais as forças internas, \vec{f}_i , que são aquelas devidas aos vínculos. Vamos dizer que em um *deslocamento instantâneo*, ou seja, para $d\vec{r}_i$ não nulo, mas mantendo t constante (ou, o que é equivalente, com $dt = 0$), as forças de vínculo não realizam *trabalho*, em outras palavras, $\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$. Assim sendo:

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_i^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k \right) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k \quad (48)$$

Atenção: não estamos falando de deslocamentos necessariamente reais, portanto não se trata de trabalho de verdade. Se \vec{r}_i for função explícita do tempo, $d\vec{r}_i$ instantâneo é algo fisicamente impossível, mesmo que estejamos contando apenas os deslocamentos permitidos pelas restrições. A hipótese feita é que, para $dq_k \neq 0$ com $dt = 0$, satisfazendo os vínculos, $d\tau$ é nulo quando aplicado às forças internas. Se, para todo i , \vec{r}_i não depende explicitamente do tempo como função das coordenadas generalizadas, $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$, então trata-se do trabalho convencional, não há nada de novo. Tal suposição é bastante cabível, pois na maioria dos sistemas físicos isso é verdade.

Tomemos como exemplo uma partícula sobre um plano inclinado, o qual se move acelerando para cima. A força de vínculo é a normal entre partícula e plano, e evidentemente ela realiza trabalho, à medida que empurra a partícula, deslocando-a entre outros efeitos para cima. Entretanto, considerando um único instante (podemos pensar em *congelar* o movimento ascendente), os deslocamentos da partícula só podem ser ao longo do plano, pois, se não, desrespeitariam o vínculo de mover-se sobre a superfície. Nesse caso, a força normal é ortogonal a qualquer deslocamento, não realizando nenhum *trabalho instantâneo*. Repare-se que é necessário fixar t em termos explícitos, é um artifício matemático! Evidentemente nenhum deslocamento de todo pode ser realizado se, de fato, não houver variação temporal.

Outro exemplo é um sistema com duas massas penduradas nas pontas de uma corda inextensível, suportada por uma polia. A força de vínculo é a tração, que se aplica a ambas as massas e sobre ambas tem mesma intensidade. Se a polia permanece em repouso, não há por que haver dependência explícita de \vec{r}_i com t , então basta analisar o simples trabalho da força interna. Como no sistema polar, podemos decompor o movimento na direção da corda e na perpendicular, o trabalho nesta é ortogonal à tração, e qualquer deslocamento naquela implica um deslocamento contrário da outra massa também paralelo à força de vínculo; de ambas as maneiras, o *trabalho* da força de vínculo é nulo¹⁵.

Teremos então que restringir a abrangência do novo formalismo a esses tipos de sistema. As outras duas restrições foram feitas sobre a natureza das coordenadas generalizadas, no entanto essa última diz respeito a uma característica física da situação, portanto é uma exigência acima de peculiaridades matemáticas de cada conjunto de coordenadas escolhidas. Vale a pena sempre começar a análise por ela, pois, se não estiver satisfeita, tampouco adiantará preocupar-se com as outras, que geralmente podem ser resolvidas com novas coordenadas.

Continuando, a Equação (48) e as considerações anteriores fornecem o seguinte, multiplicando o penúltimo termo da (45) por dq_k e somando sobre k :

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (49)$$

isso $\forall k \in \{1, 2, \dots, s\}$, dada a independência de cada dq_k . Definiremos agora a *força generalizada* na k -ésima componente, em que \vec{F}_i^e é a força externa sobre a i -ésima partícula:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (50)$$

¹⁵Após toda essa discussão, vale a pena o leitor informar-se sobre o Princípio de d'Alembert. Na outra forma de desenvolver o formalismo lagrangiano, essas considerações são feitas logo no início, pois é sobre elas que baseia-se o princípio citado e o dos Trabalhos Virtuais. Recomendamos a referência [5].

A dimensão da força generalizada, assim como das outras grandezas, pode variar. Veremos que pode ser uma força no sentido convencional, ou um torque, se a coordenada respectiva for um ângulo, por exemplo. Obtém-se finalmente a pergunta à questão do início desta seção. Enquanto a derivada temporal do momento linear é a força total sobre uma partícula, a do momento generalizado na componente k é a força generalizada na respectiva componente, mais um termo $\frac{\partial T}{\partial q_k}$. Substituindo o resultado na (45) e rearranjando:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (51)$$

A equação acima por vezes recebe o nome de 1ª Equação de Lagrange e é o primeiro grande resultado a que chegamos neste desenvolvimento, fornecendo as equações de movimento de um sistema dinâmico a partir de coordenadas generalizadas, eliminando o problema das forças de vínculo e abandonando o uso de vetores. Exemplos de aplicações serão deixados para a Seção 4.

3.5 Potencial, Lagrangiana e 2ª Equação de Lagrange

A Equação (51) é um bom passo em mecânica analítica, mas ainda pode ser mais trabalhada. Nela está presente um termo de força generalizada, que por sua vez depende das forças externas aplicadas. Se estas possuírem alguma função potencial associada, então pode-se analisar um sistema somente a partir das energias, deixando para trás também o conceito de força.

De fato, suponhamos para cada força \vec{F}_i^e existir uma função V das coordenadas cartesianas tal que $\vec{F}_i^e = -\nabla_i V$, em que $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_{1i}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial x_{3i}} \hat{k}$. Relembrando que $\vec{r}_i = x_{1i} \hat{i} + x_{2i} \hat{j} + x_{3i} \hat{k}$, segue:

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n -\nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_{1i}} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial x_{2i}} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial x_{3i}} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_{1i}}{\partial q_k} \hat{i} + \frac{\partial x_{2i}}{\partial q_k} \hat{j} + \frac{\partial x_{3i}}{\partial q_k} \hat{k} \right) \quad (52)$$

Como \vec{r}_i pode por hipótese ser dado em função das coordenadas generalizadas, o mesmo é verdade para x_l , com $l \in \{1, 2, \dots, 3n\}$. Ora, V é função das coordenadas cartesianas, então podemos reescrever o potencial em função das coordenadas generalizadas, \tilde{V} , com $V(x_1, x_2, \dots, x_{3n}) = \tilde{V}(q_1, q_2, \dots, q_s)$. Calculando o produto escalar:

$$Q_k = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_{1i}} \frac{\partial x_{1i}}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial x_{2i}} \frac{\partial x_{2i}}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial x_{3i}} \frac{\partial x_{3i}}{\partial q_k} \right) = - \sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial q_k} = - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_k} \quad (53)$$

Notamos que, caso as forças sejam conservativas, a força generalizada também é derivável a partir de um potencial, que indicaremos V sem ambiguidade. É evidente que coordenadas cartesianas são desnecessárias, uma vez que o potencial poderia ter sido dado diretamente em função das generalizadas. Assim sendo, voltando à (51):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad (54)$$

já que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, uma vez que o potencial não depende das velocidades generalizadas. Introduziremos agora a função lagrangiana:

Definição (provisória): Sejam T e V as energias cinética e potencial de um sistema, respectivamente, escritas em função de q_k e \dot{q}_k , em que, para cada k , q_k é uma coordenada generalizada. Chama-se *lagrangiana* do sistema a função:

$$L = T - V$$

Diremos que L é uma lagrangiana *apropriada* quando não houver mútua dependência entre as coordenadas e velocidades generalizadas das quais é função.

É imediata a 2ª Equação de Lagrange, ou só Equação de Lagrange, válida quando L for apropriada:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (55)$$

E com a Equação (55) terminamos o desenvolvimento do formalismo lagrangiano, pelo menos no que concerne ao nível introdutório desta apostila.

3.6 Potencial Generalizado e Função Dissipação

Frequentemente acontece em uma situação física de a força total sobre uma partícula ser devida a uma contribuição de força conservativa e outra de força não-conservativa. Por exemplo, na Seção 1.2, a força resultante sobre o projétil é em parte gravitacional (conservativa) e em parte resistiva (dissipativa). Mesmo que a força externa sobre o sistema não seja conservativa no sentido convencional, vamos supor que exista uma função U das coordenadas e possivelmente das velocidades generalizadas, satisfazendo à seguinte relação:

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (56)$$

A Equação (56) acima define o *potencial generalizado* U , que não mais necessariamente é a energia potencial do sistema¹⁶. Redefinamos então a lagrangiana:

Definição (permanente): Seja T a energia cinética generalizada e U o potencial generalizado de um sistema. Chama-se *lagrangiana* do tal sistema a função $L = T - U$.

É fácil mostrar que, utilizando a lagrangiana como redefinida acima, a Equação de Lagrange continua válida exatamente como na (55), basta uma substituição trivial de Q_k pela expressão em (56) na fórmula (51). Também é uma constatação simples que a energia potencial V é um caso particular de potencial generalizado, para quando U não tem dependência explícita nas velocidades generalizadas¹⁷.

Ainda assim, digamos que a força total externa sobre a i -ésima partícula seja deste seguinte jeito: $\vec{F}_i^e = \vec{F}_i^d + \vec{F}_i^{nd}$, em que \vec{F}_i^d é uma parcela derivável de um potencial generalizado, e \vec{F}_i^{nd} não. Com a definição de força e potencial generalizados, pela Equação (51):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^d \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{nd} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} + Q_k^{nd} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{nd} \quad (57)$$

em que $Q_k^{nd} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{nd} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$, ou seja, é a força generalizada não derivável a partir de funções potenciais. Essa última expressão mostra que a Equação de Lagrange, como formulada na (55), continua válida mesmo quando não há um potencial generalizado do qual se depreenda a força externa resultante, bastando que se a corrija como acima, acrescentando-se as contribuições não oriundas de U .

Um caso muito importante de força que não pode ser derivada de um potencial generalizado é o atrito viscoso. Analisemos um sistema em que há esse tipo de força dissipativa, e cuja lagrangiana seja L . Sendo $\gamma_i \geq 0$, o atrito \vec{A}_i sobre a partícula i é dado por $\vec{A}_i = -\gamma_i \hat{v}_i = -\gamma_i (\dot{x}_{1i} \hat{i} + \dot{x}_{2i} \hat{j} + \dot{x}_{3i} \hat{k})$, em palavras, depende linearmente da velocidade, sendo antiparalelo a ela. Por facilidade de notação, definamos o operador $\dot{\nabla}_i \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{1i}} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{2i}} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{3i}} \hat{k}$. Definamos também a *função dissipação* \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^3 \gamma_i \dot{x}_{li}^2 \quad (58)$$

Em decorrência, é imediato que $\vec{A}_i = -\dot{\nabla}_i \mathcal{F}$. Utilizando o resultado (57), a Proposição 2 e um desenvolvimento análogo àquele da (53), lembrando que no caso a força \vec{F}_i^{nd} é o próprio atrito:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{nd} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^n \dot{\nabla}_i \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \dot{q}_k} \quad (59)$$

em que $\tilde{\mathcal{F}}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) = \mathcal{F}(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3n})$, apenas reescrevemos a dissipação em função das coordenadas generalizadas (podemos fazer isso pelo mesmo motivo por que pudemos reescrever o potencial); indiquemos sem ambigüidade \mathcal{F} . Resulta a Equação de Lagrange estendida para sistemas dissipativos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \quad (60)$$

A função dissipação tem um significado físico bastante simples. Consideremos a potência dissipada \mathcal{P}_d pelas forças de atrito: $\mathcal{P}_d = - \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$. Então $\mathcal{P}_d = \sum_{i=1}^n \dot{\nabla}_i \mathcal{F} \cdot \dot{\vec{r}}_i = 2\mathcal{F}$, como pode ser facilmente verificado. Lembramos que essas relações são para atrito viscoso, ou seja, $\vec{A}_i = -\gamma_i \hat{v}_i$!

¹⁶Bem podemos observar que a definição de potencial generalizado é mais do que um preciosismo acadêmico, tendo grande aplicabilidade, pois dá conta de forças de Lorenz, não-conservativas, como mostra a [6].

¹⁷Nesse caso, nossa definição de momento generalizado coincide com a de outras referências, que empregam a lagrangiana.

3.7 Observações e Lagrangianas Equivalentes

Esta subsecção dedicar-se-á a eliminar problemas de linguagem que talvez causem incompatibilidade com outros autores e também a chamar atenção para as condições de emprego da Equação de Lagrange.

Primeiramente, há fontes que chamam de coordenadas generalizadas apenas o conjunto de s coordenadas absolutamente necessárias para descrição do movimento, isto é, já eliminando aquelas que, devido à presença de vínculos, tornam-se redundantes. Dessa forma, quando se afirma que a lagrangiana é função das coordenadas generalizadas, implicitamente está-se dizendo que elas são independentes entre si. Formalmente, porém, os vínculos são restrições no domínio das funções coordenadas e velocidades (não trabalharemos tal definição rigorosa), podendo assumir formas muito diversas e por vezes complicadas. Por conseguinte, nem sempre é possível descrever as posições em um sistema utilizando somente tantas coordenadas quantos graus de liberdade, como comentado na Nota 13.

Por isso optamos por atribuir o nome de generalizadas mesmo a coordenadas que talvez estejam atreladas a algum vínculo; o revés é sermos forçados a distinguir quais podem e quais não podem ser substituídas na lagrangiana, por isso inventamos o termo *lagrangiana apropriada* para fazer referência à dita função quando só constam em sua expressão coordenadas sem interdependência. O formalismo lagrangiano como foi aqui construído pressupõe que é possível descrever o sistema em análise utilizando apenas essas *coordenadas apropriadas* duas a duas independentes, portanto, nesta apostila, será sempre possível escrever a lagrangiana apropriada¹⁸. É crucial que não sejam substituídas na lagrangiana coordenadas vinculadas! (Insiste-se nessa repetição após ter-se encontrado livros-texto cometendo tal erro.)

Outra exigência necessária para validar as deduções acima é que \vec{r} como função das coordenadas generalizadas seja de classe C^2 , o que é bastante razoável, uma vez que isso significa serem a velocidade e a aceleração funções diferenciáveis em termos de suas análogas generalizadas. Esta é uma hipótese flagrantemente fraca, tanto que a maioria dos livros voltados para físicos nem a cita, e neste trabalho não vamos ter a preocupação de verificá-la na maior parte das vezes, embora busquemos coordenadas que já a satisfaçam; aquela sobre o *trabalho instantâneo* das forças de vínculo é mais forte. Quanto ao potencial generalizado U , não se fizeram sobre ele exigências relativas a sua dependência temporal; com efeito, pode ser que U dependa explicitamente do tempo e, não raro, isso acontecerá, vide Seção 4.3.

Abordemos, por fim, a questão da unicidade da lagrangiana. Dado um determinado conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas e um potencial, será que existe uma e apenas uma função que represente determinado sistema dinâmico na Equação (55)? A existência de uma, a lagrangiana como definida, está assegurada pelo desenvolvimento acima, desde que cumpridas as devidas hipóteses sobre sistema e coordenadas. É óbvio também, pela unicidade da derivada, que as equações de movimento oriundas da Equação (55) serão únicas, em outras palavras, uma lagrangiana representa um único sistema físico. Mas podem existir outras funções que, substituídas na (55), forneçam as mesmas equações?

Sim. Se L é a lagrangiana do tal sistema, $L + 17$ fornecerá equações de movimento obviamente tão verdadeiras quanto L , embora não seja a lagrangiana propriamente dita, pois $L + 17 \neq T - U$. Vejamos pois em quais condições mais que uma função representam o mesmo sistema.

Definição: Dadas duas funções L e \tilde{L} , L uma lagrangiana, diz-se que \tilde{L} é uma *lagrangiana equivalente a L* e denota-se $\tilde{L} \sim L$ se ambas produzem as mesmas equações de movimento via fórmula (55).

Proposição 3: Seja L uma lagrangiana apropriada, e $F \in C^2$ uma função das mesmas coordenadas e velocidades generalizadas que L , assim como do tempo t . Nessas condições, se:

$$\tilde{L} = L + \frac{dF}{dt}$$

então \tilde{L} é uma lagrangiana equivalente a L , sendo \tilde{L} também apropriada.

Demonstração: Que \tilde{L} não será função que de coordenadas apropriadas, respectivas velocidades e do tempo, é óbvio. Além disso, as Proposições 2 e 1 aplicam-se a F , nessa ordem:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_k} = 0$$

o que pode ser verificado por substituição direta e regras aritméticas elementares de derivação.

¹⁸A título de informação, os vínculos que enfrentaremos são todos *holônomos*, isto é, são da forma $g(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = 0$, g uma restrição. Além disso, será possível encontrar explicitamente uma coordenada em função de outra, se for esse o caso.

3.8 Função Pseudoenergia e Conservação

A última Proposição possui algum interesse prático: algumas vezes a lagrangiana apresenta termos que não incluem coordenadas ou velocidades generalizadas (em geral constantes ou fatores que dependem só do tempo), de forma que podem ser ignorados no desenvolvimento das contas, embora continuem a fazer parte da lagrangiana, por sua definição. É importante que não se perca nunca a verdadeira lagrangiana apropriada de um sistema, por motivos que veremos agora mesmo. Definamos a *função pseudoenergia* h :

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t) \quad (61)$$

em que com a nova notação para dependência funcional estamos dizendo que h é dada em função das coordenadas e velocidades generalizadas relevantes, assim como do tempo, e L é a lagrangiana do sistema do qual se quer que h seja a pseudoenergia.

Ao contrário da função dissipação, existem motivos muito úteis para definir-se essa nova função; comecemos por entender a razão de seu nome. Suponhamos que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, \vec{r}_i como função das coordenadas generalizadas não dependa do tempo de forma explícita, o que é equivalente a dizer que as transformações $x_k = x_k(q)$ não envolvem o parâmetro t . Suponhamos também que o potencial generalizado não dependa de velocidades, ou seja, $U = V$ é a energia potencial do sistema. Nessas condições, a energia cinética e a pseudoenergia ficam¹⁹:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad \text{e} \quad h = \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T + V \quad (62)$$

Analisando o primeiro termo de h , com vistas à fórmula para T dada na Equação (62):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \delta_{k,l} + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \delta_{k,j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j + \sum_{l=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{l=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_l \end{aligned} \quad (63)$$

Utilizando esse último resultado e comparando-o com a energia cinética generalizada:

$$h = \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T + V = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_l \dot{q}_k - T + V = 2T - T + V = T + V = E \quad (64)$$

É claro que E é a energia total do sistema, a verdadeira. Com ajuda dessa última identidade, $\frac{dE}{dt} = \frac{dh}{dt}$. Desenvolvendo:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{k=1}^s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^s \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_k^{nd} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (65)$$

Usou-se a Equação (57) na última passagem acima. Observa-se, lembrando da suposição $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$, que: $\sum_{k=1}^s Q_k^{nd} \dot{q}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \vec{F}_i^{nd} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{nd} \cdot \dot{\vec{r}}_i$; note-se, é a potência fornecida ao sistema pelas forças não deriváveis da energia potencial V . Resulta, por fim, a utilíssima sentença:

Proposição 4: Seja L a lagrangiana apropriada de um sistema de n partículas e com determinado conjunto de coordenadas generalizadas, em que, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, \vec{r}_i não é função explícita do tempo quando escrito em termos das ditas coordenadas. Se o potencial generalizado do sistema não depender de velocidades generalizadas, então a função pseudoenergia h coincide com a energia E , sendo:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \mathcal{P}$$

com $\mathcal{P} = \sum_{k=1}^s Q_k^{nd} \dot{q}_k$, a potência fornecida por forças não deriváveis de potencial presentes no sistema.

¹⁹Como temos feito em todo o desenvolvimento, supomos que as s coordenadas apropriadas sejam suficientes para a descrição do movimento, por isso pode-se escrever a energia cinética generalizada apenas com elas.

4 Revisão dos Casos Anteriores

4.1 Equivalência com as Leis de Newton

De posse de nossos novos métodos de análise, refaçamos rapidamente o estudo que havíamos empreendido utilizando apenas os conceitos e técnicas de mecânica newtoniana. É totalmente desnecessário dizer que os resultados a que chegaremos serão os mesmos (uma vez que provamos a validade do que usaremos partindo das Leis de Newton, que admitimos verdadeiras), portanto não surpreende que as equações obtidas, desta forma muito distinta, serão, em certo sentido, exatamente iguais.

Antes de começar, observemos rapidamente que as Equações de Lagrange equivalem às de Newton, uma vez que as devidas hipóteses necessárias estejam cumpridas. Isso ocorrerá em todos os nossos exemplos, assim como em quase todas as situações e, dizemos mais, *sempre*, se pensarmos nos níveis mais fundamentais de interação física. Dada uma partícula de massa m , suas coordenadas sempre podem ser dadas pelas cartesianas (x, y, z) . Sua energia cinética será $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, e diremos que está submetida a um potencial U (do qual se derivam inclusive forças eletromagnéticas). A lagrangiana será $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U$, portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} (m\dot{y}) + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y \\ m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z \end{array} \right. \Rightarrow \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (66)$$

o significado de cada letra é óbvio, como temos usado na notação deste trabalho; que a força é o gradiente do potencial segue da definição de U ; e vê-se portanto que as Equações de Lagrange implicam as de Newton, ou seja, a recíproca do desenvolvimento do formalismo lagrangiano é verdadeira, de modo que equivalem-se as leis da mecânica dadas por Newton e as decorrentes de Lagrange²⁰.

Estamos falando diretamente da equivalência das Equações de Lagrange com 2ª Lei de Newton para massa constante. Em relação às outras: a 1ª Lei, enquanto Lei da Inércia, é corolário da 2ª, e, enquanto pressuposto da existência de um referencial inercial, é axioma, que temos de aceitar ao construir um sistema de coordenadas generalizadas a partir de um sistema inercial, para poder expressar a energia cinética T corretamente, então equivalem-se Lagrange e a 1ª Lei. A 3ª Lei e a constância da massa exigem uma explicação a mais.

Embora na ordem de grandeza da experiência humana existam tanto forças de contato, como duas bolas de bilhar em choque, quanto corpos de massa variável, como um foguete, em primeiros princípios a massa de partículas não muda, e as forças fundamentais são deriváveis de funções potenciais. Desse modo, dizer $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ não traz restrições formais à equivalência que estamos mostrando, e a interação mútua de duas partículas (ação e reação ou, o que dá na mesma, conservação do momento linear) vem prevista pelo potencial a que cada uma delas está submetida (e que é gerado pela presença da outra).

Do ponto de vista puramente acadêmico, portanto, as Equações de Lagrange, ou posteriormente os Princípios Variacionais, podem ser encaradas como leis fundamentais da mecânica; contudo, a prática ensina-nos a dedicar a cada análise as ferramentas mais apropriadas. O emprego da lagrangiana é de formidável utilidade e facilidade, mas as lições da mecânica newtoniana podem continuar a ser úteis, principalmente no que diz respeito a interpretações qualitativas e a intuições sobre os sistemas físicos, mesmo que dificilmente voltemos a escrever a 2ª Lei de Newton novamente.

4.2 Problema Cartesiano

Reanalizando o problema da Seção 1.2, comecemos por uma simplificação do lançamento balístico, dizendo que não há nenhum tipo de atrito entre o projétil e o meio em que se desloca. Montemos a lagrangiana:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{e} \quad V = mgy \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (67)$$

Derivações simplíssimas conduzem ao resultado muito familiar, que já integramos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \dot{x}_0 \\ \dot{y}(t) = \dot{y}_0 - gt \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \\ y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right. \quad (68)$$

²⁰Uma consequência do formalismo lagrangiano leva ao Princípio da Mínima Ação, portanto a equivalência com as Leis de Newton permite dizer, do ponto de vista lógico, que a lei fundamental da mecânica é o tal princípio, cuja profundidade é enorme. Sua vantagem, além da estética indiscutível, é constatada em estudos posteriores de mecânica analítica (por exemplo em [5] ou [6]).

Se consideramos a presença do atrito viscoso, tal como descrito no enunciado do problema, vemos que pode-se empregar a função dissipação, que fica da forma:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\gamma(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (69)$$

Na lagrangiana nada muda, uma vez que nenhum outro aspecto do problema foi alterado. Obtemos então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\gamma}{m}\dot{y} = -g \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = x_0 + \frac{m\dot{x}_0}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) \\ y(t) = y_0 - \frac{mg}{\gamma}t + \frac{m}{\gamma} \left(\dot{y}_0 + \frac{mg}{\gamma} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{\gamma}t} \right) \end{array} \quad (70)$$

Apenas continuamos, com a mesma notação, a integração começada na (3), fazendo $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ as posições iniciais em x e em y respectivamente. Repare-se que as equações diferenciais obtidas são exatamente as mesmas de antes.

No que concerna à conservação de energia, como L não depende de t de forma direta, no lançamento sem atrito tem-se que a energia conserva-se, já no caso com atrito isso naturalmente não é verdade, sendo a potência de dissipação dada por $2\mathcal{F}$, como já se sabia, ou seja, no lançamento atmosférico a variação energética, de acordo com a Proposição 4, é dada por:

$$\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F} = -\gamma(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\gamma \left[\dot{x}_0^2 + \left(\dot{y}_0 + \frac{mg}{\gamma} \right)^2 \right] e^{-\frac{2\gamma}{m}t} + 2mg \left(\dot{y}_0 + \frac{mg}{\gamma} \right) e^{-\frac{m}{\gamma}t} - \frac{m^2g^2}{\gamma} \quad (71)$$

A variação de energia não se dá de forma constante ao longo do tempo, entretanto, para $t \rightarrow \infty$, tem-se que a potência dissipada é $\mathcal{P}_d = \frac{m^2g^2}{\gamma}$, como era esperado. Basta raciocinar que, na horizontal, o atrito deve ir freiando completamente o movimento (pois não há nenhuma força que se oponha a ele), de forma a $\dot{x} \rightarrow 0$; já na vertical, sua intensidade deve ir crescendo até perto de igualar-se à da força gravitacional, mas em oposição, ou seja, $\gamma\dot{y} \rightarrow -mg$, assim vai parando de haver aceleração em y , e a velocidade de então permanecerá cada vez mais perto de uma constante, a saber, $\dot{y} \rightarrow -\frac{mg}{\gamma}$. Atendido esse estágio, o atrito sobre o projétil terá componente mg , e a velocidade $-\frac{mg}{\gamma}$, apenas em y , daí a potência fornecida (força vezes velocidade) ser $-\frac{m^2g^2}{\gamma}$ e, portanto, a dissipada ser $\frac{m^2g^2}{\gamma}$.

Uma vez considerada a velocidade constante, o trabalho total sobre a massa deve ser nulo, pelo teorema trabalho-energia, isto é, podemos equivalentemente considerar que a força total é nula (uma vez que o deslocamento passa a ser uniforme), ou que o trabalho realizado pelo atrito cancela totalmente aquele realizado pela força da gravidade. Essa segunda abordagem permite fechar a análise energética da situação: como força conservativa, o trabalho do peso sobre a massa m cuida de converter energia potencial em cinética, não há dissipação, apenas transformação na natureza da energia. Como o trabalho da força atritiva é exatamente o oposto, toda a energia potencial transformada em cinética é imediatamente dissipada pelo atrito, deixando de fazer parte do sistema; não admira que seja $\frac{dE}{dt} < 0$ em todos os instantes do movimento, pois enquanto uma força apenas transforma, a outra apenas desgasta.

4.3 Problema Esférico

Será muito auspicioso resolver este problema usando a mecânica lagrangiana. Quando tivermo-lo equacionado, imediatamente concluiremos a conservação do momento angular na coordenada φ e a da energia, de modo trivial, sem nem um átimo de todo o trabalho que tivemos na Seção 1.3.

Ignorando totalmente a questão de inversibilidade de sistemas de coordenadas, temos simplesmente que as duplas (θ, φ) , como definidas geometricamente na Figura 2.c, podem expressar todos os pontos do espaço onde há de oscilar o pêndulo esférico cuja haste tem comprimento l . Tem-se:

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \quad \text{e} \quad V = mgl \cos \theta \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - mgl \cos \theta \quad (72)$$

Obter V é fácil, uma vez que $V = mgz$ e $z = l \cos \theta$. Como frisamos durante o desenvolvimento do formalismo, basta escrever o potencial em função das coordenadas generalizadas, uma mera substituição. O mesmo seria verdade para T , embora a fórmula da energia cinética generalizada possa ser um tanto trabalhosa. Em nossa experiência, nem sempre a usamos em uma situação prática, mas sim considerações geométricas simples. Para uma variação angular $\Delta\theta$, o arco correspondente é $l\Delta\theta$. Analogamente para $\Delta\varphi$, porém, o raio do círculo em que φ varia não é l , mas $l \sin \theta$, como vemos na figura a seguir.



Figura 6: Considerações geométricas para obtenção da lagrangiana.

É portanto claro que a velocidade será dada por componentes ortogonais $l\dot{\theta}$ e $l \sin \theta \dot{\varphi}$, basta dividir o comprimento dos arcos por uma mesma variação temporal Δt e tomar o limite $\Delta t \rightarrow 0$. Daí obtém-se a energia cinética. Para a potencial, poder-se-ia tomar $V = 0$ no centro (como fez-se implicitamente acima), e o resultado segue igual se obtido através de técnicas trigonométricas; se tomássemos o zero do potencial em outro ponto, o que é permitido, uma vez que potenciais são definidos a menos de constantes aditivas, teríamos um \tilde{V} que difere daquele que empregaremos por uma constante, portanto a lagrangiana correspondente seria equivalente à que obtivemos, e as equações de movimento não seriam afetadas, como deve ser.

Empregando a Equação de Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgl \sin \theta \end{array} \right. \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = g \sin \theta \quad (73)$$

Isso para a coordenada generalizada θ . Para a outra, φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \sin \theta (2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + \sin \theta \ddot{\varphi}) \end{array} \right. \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta = 0 \quad (74)$$

As Equações (73) e (74) são exatamente iguais às duas últimas obtidas em (13), que foram identificadas como as equações relevantes do movimento. A única diferença aparente é que, antes, por motivo didático, havíamos deixado as expressões multiplicadas por algumas constantes que neste caso já foram canceladas; a simplificação do fator $\sin \theta$ é a confirmação de uma discussão feita na Seção 2.2 acerca de sua irrelevância para a generalidade das equações. Ora, admitindo que o formalismo lagrangiano foi corretamente desenvolvido e aplicado (e ele foi), a (74) deve ser exatamente igual à última das (13); isso só pode ser verdade se a simplificação puder ser feita, portanto ela o pode.

Finalmente, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, o que se vê por mera inspeção, e assim a energia total do pêndulo esférico é conservada. Também é verdade que $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, ou seja, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0$, de que conserva-se o momento em φ , que é, como já mostrado anteriormente, o momento angular relativo ao giro do pêndulo em torno do eixo vertical. A facilidade com que tais análises puderam ser feitas, comparativamente ao labor que houve para chegar-se aos mesmos resultados usando os métodos newtonianos, é por si só um motivo para estudar-se a fundo mecânica lagrangiana.

4.4 Problema Menos Complicado

Conforme fomos avançando nesta apostila, contaremos com que o leitor tenha absorvido o espírito e a prática dos cálculos e inferências feitos ao longo do trabalho; entre outros efeitos, reduziremos a quantidade de comentários e observações, muitas das quais devem tornar-se óbvias para quem acompanha o texto.

Para o presente sistema, primeiramente repararemos que apenas uma coordenada é necessária para a descrição do movimento, aquela que havíamos chamado α . De acordo com a Figura 4, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l \sin \alpha \\ y = A \cos(\omega t) - l \cos \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m [l^2 \dot{\alpha}^2 + A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) - 2\omega l \dot{\alpha} A \sin(\omega t) \sin \alpha] \\ V = mgA \cos(\omega t) - mgl \cos \alpha \end{array} \quad (75)$$

Neste caso, para evitar complicações de entendimento geométrico, pareceu-nos melhor derivar x e y em relação ao tempo, quadrar os resultados e somá-los, obtendo T como acima. Em geral, quando as coordenadas assemelham-se a esféricas ou cartesianas, pode-se achar T sem preocupações, como fizemos na última subseção. Em casos não tão simples, convém não negligenciar o processo algébrico.

Obtendo a lagrangiana do sistema:

$$L = \frac{1}{2}m [l^2\dot{\alpha}^2 - 2\omega l\dot{\alpha}A \sin(\omega t) \sin \alpha] + mgl \cos \alpha + \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t) - mgA \cos(\omega t) \quad (76)$$

Ora, essa lagrangiana é mais extensa do que o necessário. Pela Proposição 3, podemos trabalhar com a seguinte lagrangiana equivalente \tilde{L} :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m [l^2\dot{\alpha}^2 - 2\omega l\dot{\alpha}A \sin(\omega t) \sin \alpha] + mgl \cos \alpha \quad (77)$$

Em nosso caso trabalhar com a lagrangiana equivalente não traz muito benefício, afinal os termos de L que ignoramos desaparecem imediatamente quando substituídos na Equação de Lagrange. Como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\alpha}} = ml^2\dot{\alpha} - m\omega lA \sin(\omega t) \sin \alpha \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) = ml^2\ddot{\alpha} - m\omega^2 lA \cos(\omega t) \sin \alpha - m\omega l\dot{\alpha}A \sin(\omega t) \cos \alpha \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \alpha} = -m\omega l\dot{\alpha}A \sin(\omega t) \cos \alpha - mgl \sin \alpha \end{cases} \quad (78)$$

da aplicação da Equação (55) conclui-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow ml^2\ddot{\alpha} - ml [\omega^2 A \cos(\omega t) - g] \sin \alpha = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g - \omega^2 A \cos(\omega t)}{l} \sin \alpha = 0 \quad (79)$$

concordando inteiramente com a Equação (28), deduzida na Seção 2.1.

Como lembrete, neste caso existe dependência explícita de t na expressão da posição da partícula em função da coordenada α , usada como generalizada, então a pseudoenergia do sistema não é a energia, e muito menos vale a Proposição 4. Notemos que o potencial V também depende do tempo diretamente; embora isso não seja relevante para aplicação da dita Proposição ou mesmo para o significado da pseudoenergia, fornece um exemplo claro de um sistema para o qual se pôde definir um potencial (que nem depende de velocidades), mas que não é conservativo.

Capciosamente não foi mencionado que neste caso a força de vínculo realiza algum trabalho, o que não é difícil de enxergar se pensarmos em um grande deslocamento vertical do ponto de apoio: se a amplitude A desse movimento exigir uma variação de energia potencial maior que a energia cinética disponível inicialmente, fica muito claro que alguma força está transferindo energia para o sistema; como não pode ser o peso sobre a massa, pois é conservativo, só pode ser a tração na haste. Todavia isso em nada afeta a aplicabilidade do formalismo de Lagrange, já que estipulando (mesmo que artificialmente) $dt = 0$, o apoio fica imóvel, e qualquer movimento possível da massa é circular com centro em O , como quer o vínculo, portanto perpendicular à tração, não realizando *trabalho instantâneo*. Essa é, pois, a condição que precisa estar satisfeita.

4.5 Problema Mais Complicado

Neste último caso a situação é um tanto semelhante à anterior, no entanto o ponto de apoio do pêndulo agora está livre, mesmo que apenas na horizontal, e é uma partícula de massa m_1 , enquanto que a massa do pêndulo será m_2 . É interessante o pequeno avanço de abstração empreendido pelo emprego de coordenadas generalizadas, pois não é mais necessário discernir quais coordenadas referem-se a quais partículas; basta que se descubra a lagrangiana do sistema para que se o possa equacionar.

No presente exercício, será muito útil atribuir variáveis específicas para cada uma das partículas, porém existem técnicas de resolução de problemas que tratam justamente de encontrar coordenadas (a maior parte das vezes combinações entre aquelas atribuídas a cada massa do sistema) que não dizem diretamente a posição de cada partícula, mas que simplificam grandemente a resolução das equações de movimento; entenda-se, desacoplam-nas. Contentaremos-nos por ora com o procedimento habitual, em que vamos utilizar coordenadas x e α , definidas como na Seção 2.2 e como segue. Como auxílio inicial, partiremos também de x_1 , x_2 e y_2 , componentes cartesianas das massas m_1 e m_2 .

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x + l \sin \alpha \\ y = -l \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\alpha}^2 + m_2 l \cos \alpha (\dot{x} + g) \quad (80)$$

Acima está a lagrangiana apropriada do sistema para as coordenadas escolhidas, α e x . A menos da questão do trabalho das forças de vínculo, que deixaremos para o final, as outras hipóteses para que seja aplicada a (55), já sabemos, estão satisfeitas.

Procedamos então o desenvolvimento para α :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m_2 l^2 \dot{\alpha} + m_2 l \dot{x} \cos \alpha \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m_2 l^2 \ddot{\alpha} + \dot{x} m_2 l \cos \alpha - m_2 l \dot{x} \dot{\alpha} \sin \alpha \Rightarrow l \ddot{\alpha} + \ddot{x} \cos \alpha = -g \sin \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -m_2 l \sin \alpha (\dot{\alpha} \dot{x} + g) \end{cases} \quad (81)$$

Acima obtivemos exatamente a segunda das Equações (30). Por mais que tenha sido obtido através da aplicação da Equação de Lagrange para a coordenada α , esse resultado não diz respeito exclusivamente ao comportamento de α ou da massa m_2 , sendo parte integrante e inexorável da solução completa para o movimento do sistema, que não pode ser dado separadamente para cada uma das coordenadas.

Este é um caso típico de acoplamento entre variáveis: como a evolução temporal de uma depende da outra, não se obtêm equações exclusivas, mas expressões que codificam a relação entre ambas, fornecendo o resultado para elas conjuntamente. Às vezes é possível escolher um novo conjunto de coordenadas generalizadas que possua uma equação somente para cada uma delas, embora tais escolhas não sejam capazes de eliminar a quantidade de vínculos presentes, característica física do sistema, e não decorrência da análise matemática que se faz sobre ele.

Ainda necessitamos do resultado de quando aplica-se a Equação de Lagrange a x :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\alpha} \cos \alpha \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\alpha} \cos \alpha - m_2 l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (82)$$

Essas relações levam imediatamente a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\alpha} \cos \alpha - m_2 l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha = 0 \quad (83)$$

que ainda não é exatamente igual à primeira das (30). Contudo, com um pouco de manipulação puramente algébrica, utilizando o resultado em (81):

$$l \ddot{\alpha} = -g \sin \alpha - \ddot{x} \cos \alpha \Rightarrow m_2 l \ddot{\alpha} \cos \alpha = -m_2 g \sin \alpha \cos \alpha - m_2 \ddot{x} \cos^2 \alpha \quad (84)$$

Substituindo $m_2 l \ddot{\alpha} \cos \alpha$ na (83):

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 g \sin \alpha \cos \alpha - m_2 \ddot{x} \cos^2 \alpha - m_2 l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} (1 - \cos^2 \alpha) - m_2 g \sin \alpha \cos \alpha - m_2 l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} \sin^2 \alpha - m_2 \sin \alpha (g \cos \alpha + l \dot{\alpha}^2) &= 0 \end{aligned} \quad (85)$$

Agora sim, obtém-se finalmente:

$$m_2 \sin \alpha (\ddot{x} \sin \alpha - l \dot{\alpha}^2 - g \cos \alpha) = -m_1 \ddot{x} \quad (86)$$

que é precisamente o resultado da Seção 2.2. Essa nova equação, em conjunto com a (81), forma um sistema diferencial em tudo igual àquele apresentado nas (30). A nova lição que tiramos é que o formalismo lagrangiano fornece de fato um sistema de equações de movimento totalmente equivalente ao fornecido pelo emprego direto da 2ª Lei de Newton, embora não obrigatoriamente as equações, vistas individualmente, tenham exatamente o mesmo formato. É claro que elas precisam representar o mesmo sistema, ou seja, sempre será possível através de manipulação obter equações perfeitamente iguais com os dois formalismos (afinal, dizer que elas são equivalentes significa que umas implicam as outras e vice-versa).

Como comentado, faltou averiguar a questão das forças de vínculo. Ora, neste caso a posição das partículas de massa m_1 e m_2 como função de α e x não envolve o tempo t explicitamente, de modo que o *trabalho instantâneo* será a mesma coisa que o convencional. A força de vínculo sobre m_2 é $\vec{f}_2 = -f(\sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j})$, $f \in \mathbb{R}$, e sobre m_1 é algo na vertical que certamente não realiza trabalho, pois m_1 não se desloca em tal direção, mais $\vec{f}_1 = f \sin \alpha \hat{i}$. Com $d\tau_i$ o trabalho sobre a partícula i , e $d\tau$ o trabalho total, verifiquemos que a hipótese fica satisfeita:

$$\begin{cases} d\vec{r}_1 = dx \hat{i} \\ d\vec{r}_2 = (dx + l \cos \alpha d\alpha) \hat{i} + l \sin \alpha d\alpha \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\tau_1 = \vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 = f \sin \alpha dx \\ d\tau_2 = \vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -f \sin \alpha dx \end{cases} \Rightarrow d\tau = 0 \quad (87)$$

Para encerrar, em relação à energia do sistema, se pela análise newtoniana que fizemos a pergunta *a energia é conservada?* poderia render algumas páginas de contas, ou mesmo de discussão qualitativa, com nossos novos instrumentos a resposta é trivial: é claro que a Proposição 4 aplica-se, e como a lagrangiana não tem dependência explícita do tempo, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, segue que a energia total desse sistema é constante.

5 Adequação de Coordenadas Generalizadas

5.1 Resolução em Coordenadas Menos Propícias

Nesta seção resolveremos um problema razoavelmente simples, porém fá-lo-emos com três conjuntos de coordenadas distintos, com o que pretendemos mostrar as diferenças acarretadas por escolhas mais ou menos eficientes de coordenadas. Uma dessas escolhas, por exemplo, permitirá que obtenham-se equações de movimento simples e desacopladas, de modo a conseguirmos resolver completamente o sistema diferencial do movimento.

Consideremos três partículas, todas com a mesma massa m , cada uma ligada à outra através de uma mola de comprimento relaxado l e constante elástica k , como na Figura 7.a.

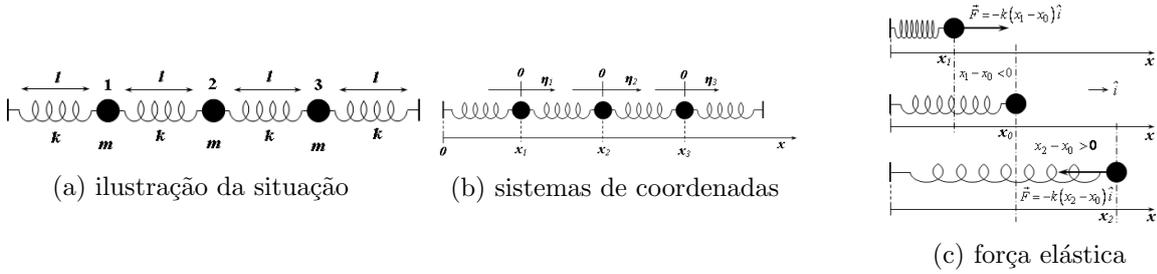


Figura 7: Exemplo de osciladores harmônicos acoplados.

As massas movimentar-se-ão apenas na horizontal, por isso não nos preocuparemos em contar graus de liberdade e vínculos a partir do espaço todo, admitiremos simplesmente que trata-se de um sistema unidimensional. Assim sendo, é suficiente para cada massa uma coordenada horizontal: serão x_1 , x_2 e x_3 , de acordo com a figura.

Para escrever a energia potencial elástica, precisamos de um termo $(x - x_0)$, em que x é a posição da massa do sistema massa-mola da Figura 7.c, e x_0 sua posição de equilíbrio, de modo a ser a diferença a elongação da mola. Para as molas 1, 2, 3 e 4, teremos, de acordo com o eixo Ox representado, as seguintes posições de equilíbrio, respectivamente: l , $x_1 + l$, $x_2 + l$ e $3l$; basta considerar a posição de uma ponta da mola como dada, e encontrar qual deve ser a da outra ponta para que não haja elongação (no caso das molas fixadas, isso já está determinado). Obtenhamos as energias do sistema:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \\ V = \frac{1}{2}k[(x_1 - l)^2 + (x_2 - x_1 - l)^2 + (x_3 - x_2 - l)^2 + (x_3 - 3l)^2] \end{cases} \quad (88)$$

de que prossegue ser a lagrangiana do sistema, para essas coordenadas:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}k[(x_1 - l)^2 + (x_2 - x_1 - l)^2 + (x_3 - x_2 - l)^2 + (x_3 - 3l)^2] \quad (89)$$

Agora procedamos a vastidiosos desdobramentos, que simplificarão a aplicação de L na Equação de Lagrange:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}k[(x_1 - l)^2 + (x_2 - x_1 - l)^2 + (x_3 - x_2 - l)^2 + (x_3 - 3l)^2] = \\ & = \frac{1}{2}k[x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 10l^2 - 2x_1l - 2x_2(x_1 + l) - 2x_3(x_2 + l) - 6x_3l + (x_1 + l)^2 + (x_2 + l)^2] = \\ & = \frac{1}{2}k[2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 12l^2 - 2x_2x_1 - 2x_3(x_2 + 4l)] = \\ & = k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_1 - x_3x_2 - 4x_3l + 6l^2) \end{aligned} \quad (90)$$

Resulta que podemos usar a seguinte lagrangiana equivalente na resolução do problema:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_1 - x_3x_2 - 4x_3l) \quad (91)$$

Através de derivações simples, chegamos às três equações de movimento:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = kx_2 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 = k(x_1 + x_3) \\ m\ddot{x}_3 + 2kx_3 = k(x_2 + 4l) \end{cases} \quad (92)$$

Temos acima um sistema de equações acopladas. Apesar disso, podemos ver que as soluções (e as equações) serão algo semelhante às de um oscilador harmônico, como esperado.

É interessante notar o fator $2k$, oriundo do fato de haver duas molas de constante k contribuindo com a força em cada massa. Ademais, para osciladores simples as equações são homogêneas; neste caso, pensando como se as coordenadas no membro direito de cada uma das (92) fossem constantes, funcionariam como deslocamentos da posição de equilíbrio x_0 , semelhante ao que avaliamos acima.

Contudo, as variáveis que escolhemos exigiram algum trabalho algébrico e ainda renderam equações acopladas; isso ocorreu, pois continuamos com a ideia de coordenadas como posições. O formalismo lagrangiano, porém, permite-nos expandir esse conceito e adotar como coordenadas, por exemplo, os alongamentos das molas! Mais ainda, ao invés de x_1 , etc., podemos usar $\eta_1 = x_1 - l$, $\eta_2 = x_2 - 2l$ e $\eta_3 = x_3 - 3l$, que são os deslocamentos de cada massa em relação a seu ponto de equilíbrio. Obtemos:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2) \\ V = \frac{1}{2}k[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 + \eta_3^2] = k(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_1\eta_2 - \eta_2\eta_3) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2) - k(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_1\eta_2 - \eta_2\eta_3) \quad (93)$$

Apenas com uma escolha mais bem sucedida de coordenadas já reduziu-se consideravelmente o trabalho algébrico. As equações assim ficam:

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + 2k\eta_1 = k\eta_2 \\ m\ddot{\eta}_2 + 2k\eta_2 = k(\eta_1 + \eta_3) \\ m\ddot{\eta}_3 + 2k\eta_3 = k\eta_2 \end{cases} \quad (94)$$

Infelizmente as (94) são um sistema cuja dificuldade não difere em nada da apresentada pelas (92), sendo a única diferença a falta do termo inhomogêneo com l , na primeira e terceira equação; isso era esperado, afinal com as η apenas trasladamos as coordenadas, de modo a serem os x_0 identificados com $\eta = 0$.

5.2 Resolução em Coordenadas Mais Propícias

Este será o primeiro e único ponto desta apostila em que deixaremos para o leitor grande parte do trabalho. Consideraremos um novo conjunto de coordenadas, nem um pouco intuitivo, com a capacidade de reduzir as equações de movimento a um caso bem conhecido. Não se esperaria jamais que alguém propusesse o sistema abaixo simplesmente averiguando como facilitar a orientação nas Figuras 7, como fizemos para as x e para as η . Na verdade, para chegar às coordenadas ν adiante o autor lançou mão de recursos de álgebra linear, reunidos como uma técnica para pequenas oscilações (mais detalhes encontram-se na [5]). Consideremo-las:

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_3) \\ \nu_2 = \frac{1}{4}(\eta_1 + \eta_3 - \sqrt{2}\eta_2) \\ \nu_3 = \frac{1}{4}(\eta_1 + \eta_3 + \sqrt{2}\eta_2) \end{cases} \quad \text{e inversamente} \quad \begin{cases} \eta_1 = \nu_2 + \nu_3 + \sqrt{2}\nu_1 \\ \eta_2 = \sqrt{2}(\nu_3 - \nu_2) \\ \eta_3 = \nu_2 + \nu_3 - \sqrt{2}\nu_1 \end{cases} \quad (95)$$

em que as η são como anteriormente. Substituindo as ν nos termos T e V da lagrangiana dada em (93):

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m[(\dot{\nu}_2 + \dot{\nu}_3 + \sqrt{2}\dot{\nu}_1)^2 + 2(\dot{\nu}_3 - \dot{\nu}_2)^2 + (\dot{\nu}_2 + \dot{\nu}_3 - \sqrt{2}\dot{\nu}_1)^2] \\ V = k[(\nu_2 + \nu_3 + \sqrt{2}\nu_1)^2 + 2(\nu_3 - \nu_2)^2 + (\nu_2 + \nu_3 - \sqrt{2}\nu_1)^2 - 2\sqrt{2}(\nu_3 - \nu_2)(\nu_3 + \nu_2)] \end{cases} \quad (96)$$

Convidamos o leitor a abrir a expressão de T algebricamente. Embora seja um tanto trabalhoso, não surge nenhuma dificuldade. Uma vez feito isso, repararemos que a expressão de V é quase igual, de modo que podemos aproveitar o desenvolvimento anterior, mais o termo que sobra. A lagrangiana torna-se:

$$L = 2m(\dot{\nu}_1^2 + \dot{\nu}_2^2 + \dot{\nu}_3^2) - 2k[2\nu_1^2 + (2 + \sqrt{2})\nu_2^2 + (2 - \sqrt{2})\nu_3^2] \quad (97)$$

e não há mais coordenadas misturadas, está desacoplada! As equações de movimento ficam:

$$\begin{cases} m\ddot{\nu}_1 + 2k\nu_1 = 0 \\ m\ddot{\nu}_2 + (2 + \sqrt{2})k\nu_2 = 0 \\ m\ddot{\nu}_3 + (2 - \sqrt{2})k\nu_3 = 0 \end{cases} \quad (98)$$

que são três osciladores harmônicos simples desacoplados, cujas soluções são amplamente bem conhecidas (e mesmo que não fossem, poderiam ser achadas, pois tais equações diferenciais são bastante simples). Com as (98) podemos de fato resolver o sistema em ν , ajustar as condições iniciais e facilmente, através das (95), encontrar as soluções em η ; daí finalmente acham-se as posições pelo tempo, as x .

Encaminhamentos

Chegamos ao final desta Introdução à Mecânica Lagrangiana, isto é, o leitor pode-se considerar devidamente apresentado aos métodos de análise introduzidos por Lagrange no estudo da física, que posteriormente desenvolveram-se formando o corpo formal daquilo que hoje recebe o nome de mecânica analítica. Assim sendo, o formalismo lagrangiano é apenas a entrada (e notável entrada) da mecânica analítica, e este trabalho não é mais do que a soleira (bem mais discreta) da mecânica lagrangiana; somando-se as duas asserções, é factível dizer que esta apostila representa as primeiras linhas do prólogo de um livro muito maior que se poderia ter acerca do estudo de sistemas dinâmicos.

A seguir quer-se relembrar o leitor da rota percorrida, destacando os principais problemas teóricos solucionados e as brechas deixadas; fazendo-o, esperamos apresentar a enorme insuficiência do conteúdo deste material e incentivar o leitor a buscar os complementos necessários para um estudo sério de mecânica (os quais, porventura, poderão vir em uma nova apostila do autor).

Vimos logo ser uma questão central encontrar sistemas de coordenadas que possibilitassem o equacionamento dos problemas, cuja grande dificuldade era a correta tradução da 2ª Lei de Newton. Assim introduzimos a noção de coordenada generalizada e dedicamo-nos a encontrar um meio de empregar apenas a elas, abandonando as grandezas vetoriais. Um grande passo veio com a generalização dos momentos, quando fomos impelidos a defini-los correlacionados cada um com uma das coordenadas empregadas. Com eles chegamos às Equações de Lagrange, que se mostraram, em princípio, equivalentes às Leis de Newton, podendo daí ser tidas do ponto de vista lógico como a lei básica.

Na verdade, as Equações de Lagrange por si só não são tomadas de modo tão fundamental, entretanto possuem estreita semelhança com outro conjunto de equações, de um ramo da matemática conhecido como Cálculo Variacional. Investigando-a mais a fundo, descobre-se que a mecânica pode ser reenunciada com base em *princípios variacionais* relativos às trocas energéticas de um sistema. O mais importante deles, a Mínima Ação, possibilita uma série de extensões utilíssimas do formalismo. A restrição mais forte feita aqui, a necessidade de não se empregarem coordenadas a não ser que estritamente independentes, pode ser bastante limitante; há muitos sistemas que não permitem que se expresse sua configuração usando apenas variáveis assim. Nesses casos, há o método dos *multiplicadores de Lagrange*, que permite substituir na lagrangiana coordenadas vinculadas, mediante a introdução nas equações de novos termos, os multiplicadores. Eles nada mais são que as forças de vínculo generalizadas, resolvendo gratuitamente outro problema: por vezes é interessante conhecer as forças de vínculo, que haviam sido eliminadas dos problemas. A introdução desses fatores pode vir a ser fundamental para que encontrem-se soluções; é o que geralmente ocorre em sistemas com vínculos *não-holônomos*, muitos deles não integráveis.

Não fizemos um estudo geral para forças de atrito, tampouco preocupamo-nos com vínculos que realizem *trabalho*, mas esses tópicos realmente não deverão fazer muita falta nos estudos do leitor. Em contrapartida, a função pseudoenergia será extremamente importante: reescrevendo-a em termos de coordenadas e momentos generalizados, torna-se a pseudoenergia a função *hamiltoniana* do sistema (a transformação de Legendre da lagrangiana), a partir da qual se obtêm equações de movimento tão bem quanto antes, com a vantagem de serem as *Equações de Hamilton* diferenciais de primeira ordem. As consequências dessa nova abordagem, mais o acréscimo de um novo conceito, que será tratar os momentos conjugados como espécies de coordenadas, trarão mudanças brutais no tratamento da mecânica e, em estudos de maior alcance, levarão a mecânica analítica a suas mais profundas generalizações (não é à toa que alguns conceitos desse *formalismo hamiltoniano* são empregados para abordar a mecânica quântica).

O autor sugere ao estudante de física que prossiga segundo o caminho descrito acima, dos princípios variacionais e do formalismo hamiltoniano; as referências [5] e [6] abaixo são um insumo suficiente para uma primeira aproximação a esses assuntos. Existem outras alternativas, é claro: o formalismo lagrangiano, mesmo que não desenvolvido em toda sua potencialidade, prova-se sempre muito útil, de modo que surgiram vários métodos de simplificação e resolução de problemas com base nele. Destaca-se a técnica de *pequenas oscilações*, uma vez que osciladores são fundamentais na física (vide [5]). Há também extensões mais vigorosas do formalismo, como seu emprego em mecânica de corpos rígidos e a formulação lagrangiana da relatividade e da mecânica clássica de campos; para esses assuntos sugerimos a [6].

Por último, justamente por ser o recado mais importante, gostaríamos de agradecer a professores e colegas que contribuíram com a leitura atenciosa e os comentários pertinentes; digo que não poderia ter esforçado-me com tanto desprendimento neste verão, não fosse saber que a apostila é destinada a eles, merecedores de meu maior empenho. Sobretudo agradeço a meu próprio pai, pela ajuda providencial e indispensável com as figuras. Deve-se a essas pessoas a motivação de alguns parágrafos com discussões, embora naturalmente todos os erros sejam culpa única do autor. Mas cuidado: se há algum erro o qual o leitor não tenha percebido, será culpa exclusiva sua, por ter acreditado no que lhe foi dito sem verificar!!

Apêndice - Obtenção de Versores em Sistemas de Referência

Na Seção 2.1, empregamos uma fórmula dada pelas Equações (21) para obter os versores relativos às coordenadas que havíamos estabelecido para descrição do movimento; logo em seguida poderíamos verificar a ortonormalidade da base por eles formada através do produto escalar. Na realidade, as (21) fornecem um método geral de obtenção de bases ortonormais a partir de conjuntos de coordenadas, quando isso é possível.

O que é pretendido neste Apêndice é apresentar o método, fazer alguns comentários e demonstrar sua propriedade mais relevante: a de fornecer automaticamente vetores dois a dois ortogonais relacionados às coordenadas. Antes, porém, é necessário um esforço sério de estabelecimento de linguagem que não dê margem a mau-entendidos ou a interpretações errôneas. Em nenhuma das referências o autor encontrou o desenvolvimento feito abaixo (embora tenhamos constatado *a posteriori* que uma parte do que é feito é essencialmente uma simplificação da [7]), de modo que as proposições e suas demonstrações foram por nós feitas independentemente, e isso significa que, mais do que nunca, chamamos a atenção do leitor a detalhes e pedimos que aguce sua criticidade, a fim de descobrir possíveis falhas no trabalho abaixo.

Primeiramente, vamos deixar claro o que se pretendeu com a palavra coordenada, em toda esta apostila. Em álgebra linear, dado um espaço vetorial V^n de dimensão finita, é fato que todos seus elementos podem ser dados de maneira única como combinações lineares de elementos de um conjunto finito $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V^n$ chamado base do espaço, ou seja, se $v \in V^n$, é verdade que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ tais que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$; evidentemente qualquer combinação dos vetores da base participa do espaço. Como essa relação é biunívoca, é sempre possível haver um isomorfismo entre V^n e um espaço real de mesma dimensão, \mathbb{R}^n , basta considerar a bijeção $v \longleftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Definem-se como coordenadas de v cada um dos números α_i correspondentes a v de acordo com a aplicação supracitada.

Aqui fizemos substancialmente diferente, e é muito bom que o leitor tenha-o percebido de imediato no começo do texto. Para explicar, podemos tomar o caso tridimensional: como coordenadas do espaço temos a tripla $(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3$, que, em relação aos versores da base canônica $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \subset V^3$, são coordenadas como no sentido acima. Não nos limitamos a tal noção; com efeito, dadas três variáveis distintas $(x', y', z') \subset \mathbb{R}^3$, podem-se estipular três funções $x = x(x', y', z')$, $y = y(x', y', z')$ e $z = z(x', y', z')$, que com certas condições são inversíveis e, portanto, bijetoras. Assim sendo, podemos considerar a nova tripla (x', y', z') como coordenadas de V^3 mesmo que esses números não sejam os coeficientes dos versores canônicos (e, de fato, em todos os sistemas adotados acima, com exceção óbvia ao cartesiano, as coordenadas não são coeficientes de versores de base nenhuma).

Por exemplo, dada uma partícula em movimento circular em torno de uma origem O , queremos usar coordenadas polares (ρ, θ) . Definimo-las de forma que seja a posição sempre $\rho \hat{e}_\rho$. Dizer, portanto, que suas coordenadas são $\rho = 17$ e $\theta = \pi$ não quer dizer em absoluto que o vetor-posição da partícula seja dado por $17 \hat{e}_\rho + \pi \hat{e}_\theta$, isso nem faz sentido pela definição! Quer dizer, porém, que \hat{e}_ρ é dado por $\cos \pi \hat{i} + \sin \pi \hat{j}$ e, agora sim, a localização da partícula está em $17 \hat{e}_\rho$; em palavras, significa que está à distância de 17 unidades da origem, com o eixo radial inclinado em π radianos relativamente ao eixo polar, $17 \cos \pi \hat{i} + 17 \sin \pi \hat{j}$. Uma vez dados os versores polares em função da posição da partícula, todos os outros vetores do problema, como forças e velocidades, são passíveis de ser dados por eles. Poderíamos ter uma aceleração $15 \hat{e}_\rho + 6 \hat{e}_\theta$ por exemplo, e é claro que isso não significa que suas coordenadas $(\tilde{\rho}, \tilde{\theta})$ sejam $\tilde{\rho} = 15$ e $\tilde{\theta} = 6$. Podemos extraí-las do seguinte modo:

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \end{cases} \Rightarrow 15 \hat{e}_\rho + 6 \hat{e}_\theta = (15 \cos \pi - 6 \sin \pi) \hat{i} + (15 \sin \pi + 6 \cos \pi) \hat{j} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\rho} \cos \tilde{\theta} = 15 \cos \pi \\ \tilde{\rho} \sin \tilde{\theta} = 6 \cos \pi \end{cases}$$

Por extenso, o cálculo acima segue o seguinte raciocínio: descobrir a inclinação $\tilde{\theta}$ do vetor aceleração em relação ao eixo polar e seu valor em intensidade, $\tilde{\rho}$; se fosse uma posição, $\tilde{\rho}$ seria a distância do ponto referenciado à origem O (é o *tamanho* do vetor).

Elucidaremos agora o que será entendido por uma base ortonormal de versores associada a um conjunto de coordenadas. Afirmamos que, inicialmente, não faz sentido falar em direção de coordenadas, uma vez que são números reais escalares, e não vetores. Entretanto, grosso modo é possível compreender que, para variações de uma coordenada, um vetor varia por consequência, e a variação vetorial possui direção, de forma que se pode tomá-la como a direção da variação da coordenada e, por extensão, dela própria. Em termos mais precisos: o vetor $\vec{r} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$ pode ser dado em função de (q_1, q_2, q_3) se cada uma das componentes (x_1, x_2, x_3) for função de q_i , $i \in \{1, 2, 3\}$; como esperamos que a transformação seja inversível e queremos-la diferenciável, deve ter jacobiano não-nulo (por conseguinte o mesmo para todas suas linhas e colunas), e portanto segue a sentença da próxima página.

Conseguimos a desigualdade abaixo tendo em conta que os elementos da i -ésima coluna do determinante jacobiano da transformação $x \mapsto q$ não são simultaneamente nulos.

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \neq \vec{0} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Conclui-se que, para uma variação $dq_i \neq 0$ apenas da i -ésima coordenada, a variação correspondente do vetor é $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$, não-nula. Assim é-nos permitido entender a *direção da coordenada* q_i como a dada pelo vetor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, e ela fica bem definida.

Essa ideia não é nova: quando buscávamos por novos sistemas de referência, nas Seções 1 e 2, na verdade estávamos procurando a correspondente variação do vetor-posição de uma partícula devido a perturbações (forças) em uma de suas coordenadas; fizemo-lo explicitamente na Seção 2.1. Nesses trechos do trabalho, sempre verificávamos se os versores obtidos eram dois a dois ortogonais, pois, se não o fossem, uma força atuante sobre uma única coordenada teria componentes em mais de um versor, algo nada prático. Ficariamos aquém do necessário para desenvolver uma boa técnica se não procurássemos saber quando os vetores obtidos a partir das coordenadas são mutuamente ortogonais.

Vejamus um caso problemático:

$$\begin{cases} x = e^\alpha \beta^3 \\ y = e^{-\alpha} \beta^3 \end{cases} \quad \text{e inversamente} \quad \begin{cases} \beta = \sqrt[3]{xy} \\ \alpha = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \end{cases}$$

Encontremos as derivadas parciais de $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ relativas a α e a β :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = e^\alpha \beta^3 \hat{i} - e^{-\alpha} \beta^3 \hat{j} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = 3e^\alpha \beta^2 \hat{i} + 3e^{-\alpha} \beta^2 \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^\alpha \beta^3 & 3e^\alpha \beta^2 \\ -e^{-\alpha} \beta^3 & 3e^{-\alpha} \beta^2 \end{vmatrix} = 6\beta^5$$

Vê-se então que o jacobiano anula-se apenas para $x = y = \beta = 0$, ou seja, a transformação só não é contínua e diferenciável na origem do plano Oxy ; restringindo o domínio da bijeção para excetuar esse ponto, isso não causa nenhum problema. Por outro lado, tomando o produto escalar entre os vetores relativos às direções das novas coordenadas:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = 3e^{2\alpha} \beta^5 - 3e^{-2\alpha} \beta^5 = 3\beta^5 e^{2\alpha} (1 - e^{-4\alpha}) \neq 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Já havíamos restringido β para que não fosse 0, então a única forma de esses vetores serem ortogonais é sendo $\alpha = 0$; é fácil de ver pelas transformações acima que isso ocorre exclusivamente quando $x = y$, ou seja, os vetores associados às coordenadas não são ortogonais em geral, apenas em um subconjunto de \mathbb{R}^2 que nem subespaço vetorial é, por não possuir o elemento $\vec{0}$. Em outras palavras, uma eventual base $\{\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta\}$ seria inútil para as aplicações na mecânica.

Quando estamos tratando com coordenadas polares, cilíndricas, esféricas, etc., verifica-se diretamente (como fizemos no começo da apostila) que os elementos fornecidos pela derivação do vetor-posição em relação a cada uma das coordenadas são ortonormais. Além disso, uma observação interessante e muito profícua é que, naqueles casos, eram sempre verdade identidades da seguinte forma: $\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho}{\partial x}$, ou então $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \rho^2 \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Veremos que a ortogonalidade de tais vetores está associada à existência de *fatores de escala*, que são funções reais h_i (convencionadas positivas) de mesmo domínio que o novo conjunto de coordenadas, com a seguinte propriedade: $\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_k}$ para cada i e para cada k . Observemos de pronto que $h_i \neq 0$ em todos os pontos em que o jacobiano da transformação é diferente de 0, caso contrário toda uma linha (ou uma coluna) sua seria nula, absurdo.

Teorema: Seja $\vec{r} \in V^3$, $\vec{r} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$, com $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Dado um conjunto de coordenadas $(q_1, q_2, q_3) \in A \subset \mathbb{R}^3$ tal que a transformação $(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (q_1, q_2, q_3)$ possua determinante jacobiano não-nulo em A , o conjunto $\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right\}$ é uma base ortogonal de V^3 se e somente se existirem fatores de escala h_i associados a cada nova coordenada, isto é, se e somente se $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \exists h_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_k}$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$.

Demonstração: Fica como exercício para o leitor. Brincadeira. Começemos por reunir as observações acima: como o jacobiano não assume o valor 0, cada um dos $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ não é o vetor-nulo, portanto é suficiente que sejam dois a dois ortogonais para formarem uma base, e é isso que provaremos.

Pelo mesmo motivo, fixado $k \in \{1, 2, 3\}$, não podem ser $\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = 0$ concomitantemente para todo i , analogamente para $\frac{\partial q_k}{\partial x_i}$; denotando por simplicidade $\vec{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial q_k}{\partial x_2} \hat{j} + \frac{\partial q_k}{\partial x_3} \hat{k}$, nenhum desses é o vetor-nulo. Ainda pela não-nulidade do jacobiano, a transformação $(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (q_1, q_2, q_3)$ é bijetora, inversível e diferenciável em seu domínio, de modo que a Regra da Cadeia fornece os seguintes operadores diferenciais, escritos em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Ambos os operadores formam sistemas lineares; vemos que um funciona como o inverso do outro. De fato, é possível fazer:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

do que se concluem as seguintes relações, sempre com i e j em $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \hat{j} + \frac{\partial q_1}{\partial x_3} \hat{k} \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \vec{q}_1 = \delta_{1,i} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \left(\frac{\partial q_2}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \hat{j} + \frac{\partial q_2}{\partial x_3} \hat{k} \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \cdot \vec{q}_2 = \delta_{2,i} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \left(\frac{\partial q_3}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial q_3}{\partial x_2} \hat{j} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \hat{k} \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \cdot \vec{q}_3 = \delta_{3,i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \vec{q}_i = \delta_{i,j}$$

Agora a análise é simples: se existem os fatores de escala h_i , então eles são não-nulos e $\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_j}$, do que segue ser $\vec{q}_i = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ e, portanto, $\frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \delta_{i,j}$, de acordo com a relação haurida acima. Decorre que, se $i \neq j$, então $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 0$, o que quer dizer que esses vetores são dois a dois ortogonais (já que são ambos diferentes de $\vec{0}$), ou seja, o conjunto $\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right\}$ é uma base ortogonal de V^3 .

Por outro lado, \vec{q}_i é ortogonal a $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ e a $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$ se $i \neq j$ e $i \neq k$. Se o tal conjunto for uma base ortogonal, segue que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ também é ortogonal aos dois últimos, e portanto $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \vec{q}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, com $\lambda \neq 0$, pois nenhum desses vetores é nulo e está-se em V^3 . Ademais, $\lambda > 0$, pois, pela condição acima: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \vec{q}_i = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)^2 = 1$, que implica $\lambda = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|^2 > 0$. Assim podemos fazer $\lambda = h_i^2$, do que resulta $h_i^2 \vec{q}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ e, por conseguinte, $\frac{\partial x_k}{\partial q_i} = h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_k}$, afirmações que permanecem válidas para todo i e para todo k . O teorema está provado.

Corolário: Com a nomenclatura do teorema, definindo o fator de escala positivamente: $h_i = \sqrt{h_i^2}$, se $\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right\}$ for uma base ortogonal de V^3 , então $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, com $\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, é uma base ortonormal do mesmo espaço.

Corolário (equivalente ao anterior): Se $\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right\}$ for uma base ortogonal de V^3 , então cada fator de escala positivamente definido é a norma do vetor correspondente, ou seja, $h_i = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|$, para i como acima.

Demonstração: A equivalência entre os dois corolários é óbvia: uma vez que cada \hat{e}_i está definido para ser um vetor unitário na direção de $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, h_i tem que ser a norma desse último vetor; reciprocamente, se isso for verdade, \hat{e}_i será versor de $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$. Basta então provar que $h_i^2 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|^2$, mas essa identidade sai como escólio da demonstração do teorema: $h_i^2 = \lambda = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|^2$. A norma de um vetor é um número positivo, de modo que, definindo $h_i = \sqrt{h_i^2} = |h_i|$, imediatamente obtém-se $h_i = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|$.

Os fatos acima provados revelam-se muito úteis na prática, pois permitem uma série de facilidades, desde o método para obtenção de bases relativas a diferentes conjuntos de coordenadas até a generalização de operadores vetoriais, como o gradiente, quando as coordenadas permitem versores ortonormais em suas direções. É o que faremos a seguir.

Começemos por retomar o vetor $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, que inicialmente está escrito em coordenadas cartesianas, afinal costumam-se definir os operadores com que trabalharemos diretamente em termos de (x, y, z) . Continuaremos a denotar a nova tripla de coordenadas por (q_1, q_2, q_3) , e assumiremos que a partir dela obtém-se uma base ortonormal do espaço, $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, pelo procedimento:

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

A partir deste ponto será crucial manter a notação clara e bem organizada, principalmente porque em várias passagens abaixo seremos forçados a escrever a mesma função ora nas coordenadas cartesianas, ora nas q e, pior, às vezes misturando componentes de um sistema com versores do outro. Adotaremos uma notação que visa a facilitar a compreensão do leitor mesmo diante da confusão com as coordenadas. Antes de tudo, assumiremos que uma função a valores reais dependente de (x, y, z) pode ser expressa como função de (q_1, q_2, q_3) , o que já sabemos ser verdade no domínio de validade da transformação entre as coordenadas.

Assim, quando determinada quantidade real vem em função das variáveis cartesianas, hemos de denotar F ; quando a mesma vier como função das q , será F^q . Se estivermos tratando de uma função a valores vetoriais, teremos na verdade três funções reais, uma em cada componente; expressando-a na base canônica, com coordenadas (x, y, z) , denotaremos $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$; ainda nessa base, as componentes podem ser dadas pelas coordenadas (q_1, q_2, q_3) , teremos então $\vec{F}^q = F_x^q\hat{i} + F_y^q\hat{j} + F_z^q\hat{k}$, seguindo a notação convencional para funções escalares. Já quando usarmos a nova base ortonormal, denotaremos $\vec{F}^{\vec{q}} = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3$.

A título de exemplo, consideremos o vetor-posição de uma partícula, $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$, na base canônica com coordenadas cartesianas. Podemos reescrevê-lo, na mesma base, mas com coordenadas polares: $\vec{F}^q = \rho \cos \theta \hat{i} + \rho \sin \theta \hat{j}$; ou fazê-lo na base polar: $\vec{F}^{\vec{q}} = \rho \hat{e}_\rho$. No primeiro caso temos as funções $F_x = x$, $F_y = y$ e $F_z = 0$; no segundo há $F_\rho = \rho$ e $F_\theta = 0$. Não nos preocuparemos com uma notação especial para as componentes na nova base expressas em função das coordenadas cartesianas, pois esse caso não será de utilidade no desenvolvimento subsequente.

Agora sim, seja $F = F^q$ uma função a valores reais qualquer, da qual se pode extrair o gradiente. Queremos expressá-lo em termos das novas coordenadas e, é claro, dos novos versores. Partamos da definição de **grad** F e empreguemos a Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} \hat{i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial y} \hat{j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial z} \hat{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^q}{\partial q_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \hat{k} \right)$$

O Teorema assegura a presença de fatores de escala, de modo que $\frac{\partial x}{\partial q_i} = h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x}$, o mesmo para y e z , então, reconhecendo a definição dos novos versores:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^q}{\partial q_i} \frac{1}{h_i^2} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \hat{k} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^q}{\partial q_i} \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Rightarrow \mathbf{grad} F^q = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial F^q}{\partial q_i} \hat{e}_i$$

Façamos o mesmo para o divergente, sendo $\vec{F} = \vec{F}^q = \vec{F}^{\vec{q}}$ qualquer função que possa fornecer **div** \vec{F} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F_x^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial F_y^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial y} + \frac{\partial F_z^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F_x^q}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial F_y^q}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial F_z^q}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \frac{1}{h_i^2} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F_x^q}{\partial q_i} \hat{i} + \frac{\partial F_y^q}{\partial q_i} \hat{j} + \frac{\partial F_z^q}{\partial q_i} \hat{k} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{1}{h_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{F}^q}{\partial q_i} \cdot \hat{e}_i \Rightarrow \mathbf{div} \vec{F}^{\vec{q}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{F}^{\vec{q}}}{\partial q_i} \end{aligned}$$

pois $\frac{\partial \vec{F}^q}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{F}^{\vec{q}}}{\partial q_i}$, já que o vetor não depende da base em que é expresso (na prática, porém, deve-se lembrar que os novos versores não são sempre constantes e considerar suas derivadas parciais também).

Com o gradiente e o divergente obtidos acima, pode-se também encontrar uma fórmula geral para cálculo do laplaciano de uma função escalar escrita em termos de coordenadas q , quando satisfeitas as condições do teorema, o que nos parece um tanto fastidioso.

A referência [7] traz uma abordagem diferente e profícua para esses operadores, usando conceitos como volumes em \mathbb{R}^3 , de que fórmulas gerais para eles e para o laplaciano são deduzidas, sem necessidade de derivar versores, mas com o revés de exigir a derivada de vários longos produtos.

Falta agora generalizar o operador rotacional para diferentes conjuntos de coordenadas e bases ortonormais associadas. Para tanto, recorramos à fórmula mnemônica de rotacional em coordenadas cartesianas e base canônica de uma certa função $\vec{F} = \vec{F}^q = \vec{F}^{\vec{q}}$:

$$\mathbf{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Procedendo como anteriormente, com auxílio da Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \vec{F} &= \sum_{i=1}^3 \left[\hat{i} \left(\frac{\partial F_z^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial y} - \frac{\partial F_y^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial F_z^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial F_x^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial F_x^q}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial y} \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^3 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial q_i}{\partial x} & \frac{\partial q_i}{\partial y} & \frac{\partial q_i}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x^q}{\partial q_i} & \frac{\partial F_y^q}{\partial q_i} & \frac{\partial F_z^q}{\partial q_i} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial q_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \hat{k} \right) \wedge \left(\frac{\partial F_x^q}{\partial q_i} \hat{i} + \frac{\partial F_y^q}{\partial q_i} \hat{j} + \frac{\partial F_z^q}{\partial q_i} \hat{k} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial \vec{F}^q}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Observemos, sendo a base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ ortonormal, que podemos reordenar as coordenadas de forma que seja a base também positiva nessa ordem; assumamos então, sem perda de generalidade, que $\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_3$, $\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_1$ e $\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = \hat{e}_2$. Continuando:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial \vec{F}^q}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \wedge \frac{\partial \vec{F}^{\vec{q}}}{\partial q_i} \Rightarrow \mathbf{rot} \vec{F}^{\vec{q}} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \wedge \frac{\partial \vec{F}^{\vec{q}}}{\partial q_i}$$

Chega-se finalmente ao rotacional para funções vetoriais dadas em coordenadas diversas e bases com versores associados. Nas três fórmulas acima, para gradiente, divergente e rotacional, obviamente é necessário que as coordenadas q possam fornecer bases ortonormais, de acordo com o processo descrito. Evidentemente a vantagem das expressões que achamos consiste em facilitar os cálculos (após as tivermos reescrito adiante), permitindo que se aplique cada um dos operadores diretamente a funções dadas em termos de (q_1, q_2, q_3) e eventualmente de $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

Temos indicado o gradiente de uma função por **grad**, o rotacional por **rot** e o divergente por **div**, redefiniremos agora o operador nabla da seguinte forma: $\nabla = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right)$, subentendendo-se que cada componente está expressa na nova base de versores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Consiste em simples trabalho algébrico abrir as somatórias anteriores e mostrar:

Proposição: Dada uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e uma função $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ também diferenciável, expressa em coordenadas (q_1, q_2, q_3) na base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ (de acordo com o teorema e os corolários acima), o gradiente de f , o divergente e o rotacional de \vec{F} são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \nabla f \\ \mathbf{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \cdot \left(F_1 \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_i} + F_2 \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial q_i} + F_3 \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial q_i} \right) \\ \mathbf{rot} \vec{F} &= \nabla \wedge \vec{F} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \wedge \left(F_1 \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_i} + F_2 \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial q_i} + F_3 \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

Vemos portanto que os operadores vetoriais, quando expressos em bases de versores constantes, reduzem-se simplesmente a ∇f , $\nabla \cdot \vec{F}$ e $\nabla \wedge \vec{F}$, como no caso cartesiano, em que cada fator de escala é unitário e recuperamos as formas conhecidas para (x, y, z) . Seria muita sorte se fosse assim para quaisquer sistemas, entretanto, para aqueles cujos versores variam, deve-se acrescentar um termo, dado pelas somatórias nas expressões para o divergente e o rotacional; ou seja, uma parte do valor do operador resulta da própria função (a partir do operador ∇) e outra resulta das transformações da base (a partir da somatória), mesmo que elas não sejam de todo separadas. Repare-se que esta última contribuição não aparece para o gradiente, afinal, este atua sobre uma função escalar e portanto a base não está envolvida.

As fórmulas para rotacional e divergente são bastante simétricas e, dependendo do sistema de coordenadas em questão, os termos da somatória podem simplificar-se e muito! Tomemos como exemplo o sistema de coordenadas esféricas, definido no começo desta apostila, cujos versores são dados em (4). Tal base esférica é particularmente útil quando se tem uma força central²¹ atuante, afinal, fazendo do centro de interação a origem do sistema, a força dependerá exclusivamente da coordenada ρ , além disso, tendo direção radial, basta-nos o versor \hat{e}_ρ para exprimi-la: $\vec{F}(\vec{r}) = F(\rho)\hat{e}_\rho$.

A importância dessas forças em física também é central, sendo desse tipo as forças gravitacionais e eletrostáticas, além de vários modelos de forças elásticas e nucleares; como a introdução de uma função potencial em um problema físico é uma questão sempre relevante (pois, além de facilitar os cálculos transformando equações vetoriais em escalares, ainda permite, por exemplo, tratar o problema com o formalismo de Lagrange, objeto deste trabalho), conhecer o rotacional da força é fundamental, pois a introdução de um potencial escalar só é possível para campos de força irrotacionais.

Calculemos pois $\mathbf{rot} \vec{F}$, lembrando que na física as funções desse tipo são comumente diferenciáveis em quase toda a parte (sendo geralmente singular a origem, ponto que pode ocasionar problemas em coordenadas esféricas). Para tanto, a partir das (4):

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta \qquad \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = \sin \theta \hat{e}_\varphi$$

Como $\vec{F}(\vec{r}) = (F(\rho), 0, 0)$, temos da última proposição:

$$\mathbf{rot} \vec{F} = \nabla \wedge \vec{F} + \frac{F}{h_\theta} \hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_\theta + \frac{F \sin \theta}{h_\varphi} \hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_\varphi = \nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\varphi \\ \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F(\rho) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Ou seja, dada qualquer força central \vec{F} (diferenciável), obrigatoriamente $\mathbf{rot} \vec{F} = \vec{0}$, ela será irrotacional independentemente de qual seja a forma funcional de F , portanto há um campo potencial associado a ela, o formalismo lagrangiano torna-se aplicável, dentre outras consequências importantes (muitas vezes essas forças são, além de irrotacionais, conservativas, o que fica fácil de ser mostrado, pois então basta calcular sua circulação (integral de linha) ao longo de um caminho simples ao redor dos pontos singulares).

Uma última consequência notável, e por vezes muito útil, é a seguinte observação:

Proposição: Dadas as coordenadas cartesianas (x, y, z) e um outro conjunto de coordenadas (q_1, q_2, q_3) nas condições do teorema acima, sejam h_1, h_2 e h_3 os respectivos fatores de escala. Assim, o jacobiano \mathbf{J} da transformação $(x, y, z) \mapsto (q_1, q_2, q_3)$ é o produto dos fatores de escala, isto é, $\mathbf{J} = \prod_{i=1}^3 h_i$.

Demonstração: É apenas trabalho algébrico e reconhecimento de produtos entre vetores:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} - \frac{\partial y}{\partial q_3} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) - \frac{\partial y}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} - \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial z}{\partial q_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} - \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{\partial y}{\partial q_2} \right) = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} - \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_3} - \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_3} - \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_3} \right) \hat{k} \right] = \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) = h_1 \hat{e}_1 \cdot (h_2 \hat{e}_2 \wedge h_3 \hat{e}_3) = h_1 h_2 h_3 \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3) = \prod_{i=1}^3 h_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_1 \Rightarrow \mathbf{J} = \prod_{i=1}^3 h_i \end{aligned}$$

Intuitivamente é natural suspeitar da validade da Proposição, afinal quem já estudou integrais múltiplas sabe que o jacobiano nada mais é do que uma espécie de *fator de escala volumétrico*, convertendo um elemento de volume $dx dy dz$ em $dq_1 dq_2 dq_3$, isso em linguagem bastante informal. Ora, parece razoável esse fator de proporção ser o produto dos fatores de escala, já que cada um guarda a correspondência de um dos elementos de lado dx a um dq_1 , por exemplo. Em termos ligeiramente mais precisos, o jacobiano é o produto misto dos três vetores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ (em módulo, o volume do sólido cujas arestas ficam por eles definidas); sendo ortogonais, trata-se do produto de suas normas, os fatores de escala, como demonstramos rigorosamente.

Reduzir o teorema e suas consequências a V^2 é trivial. Assim, chegamos ao fim de todos os desenvolvimentos pretendidos neste trabalho.

²¹Em física define-se força central como uma força que depende unicamente da distância do ponto em que atua a um outro ponto, chamado centro de força, e dá-se na direção que liga ambos.

Referências

- [1] Lima, Elon L., *Curso de Análise; v.2*, 12^a edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2009;
- [2] Symon, Keith R., *Mechanics*, 2^a edição, Ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1963;
- [3] Newton, Isaac, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 3^a edição, Regiæ Societatis typographos, Londres, 1726;
- [4] Nussenzveig, H. Moysés, *Curso de Física Básica; v.1, Mecânica*, 4^a edição, Ed. Edgar Blücher, São Paulo, 2002;
- [5] Lemos, Nivaldo A., *Mecânica Analítica*, 2^a edição, Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2007;
- [6] Goldstein, Herbert, *Classical Mechanics*, 2^a edição, Ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1980;
- [7] Arfken, G. B. e Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 5^a edição, Ed. Academic Press, San Diego, 2001

Nota: Prezado leitor, por favor, se acaso encontrar erros ao longo do texto, principalmente de matemática, mas também de redação e sentido, entre em contato com o autor via endereços abaixo e avirta-o. Igualmente se houver algum ponto obscuro, ou demais sugestões. Obrigado.

vbchabu@fma.if.usp.br
vbchabu@gmail.com