
Uma Análise Intuitiva do Método dos Elementos Finitos

Eletrostática
e
Magnetostática

Equações de Maxwell

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \rho \cdot d\tau$$



(1831 - 1879)

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Os problemas estáticos

■ Eletrostática

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho d\tau$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

■ Magnetostática

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

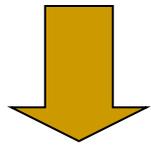
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Definição de potenciais

■ Eletrostática

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

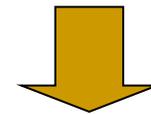


$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

■ Magnetostática

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

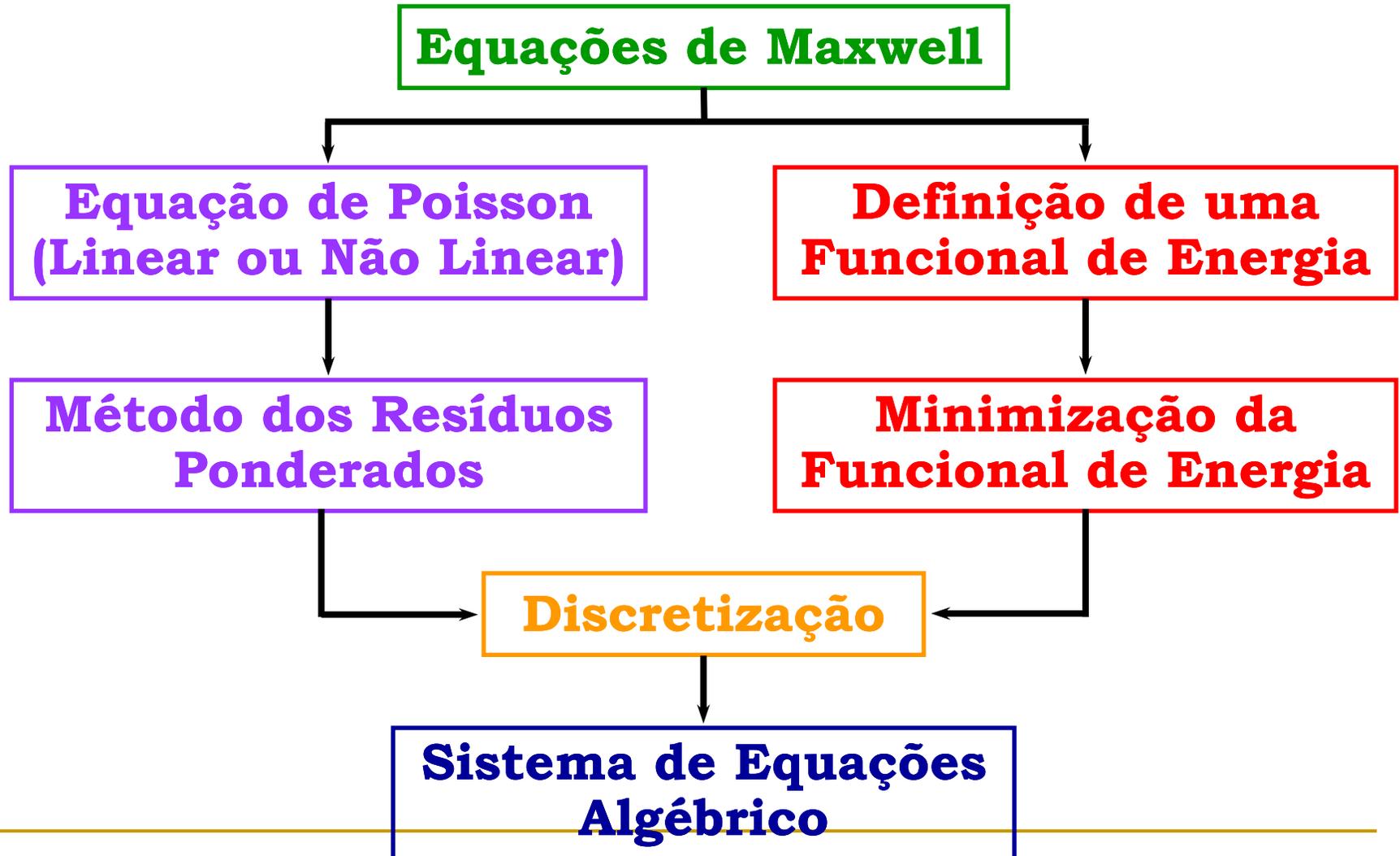


$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Método dos Elementos Finitos

- Algumas Premissas:
- *Os problemas a serem analisados são bidimensionais.*
- *Dividir o domínio em estudo em elementos. No caso triângulos.*
- *Objetivo: determinar o **potencial** em cada vértice (nó). Posteriormente determinar **Campos nos elementos** e outras grandezas (Capacitâncias, Indutâncias, Forças, Torques)*
- *Com o potencial:*
 - *Impor o potencial nas fronteiras em que ele é conhecido*
 - *Não será necessário verificar fronteiras em que $\partial\phi/\partial n = 0$*

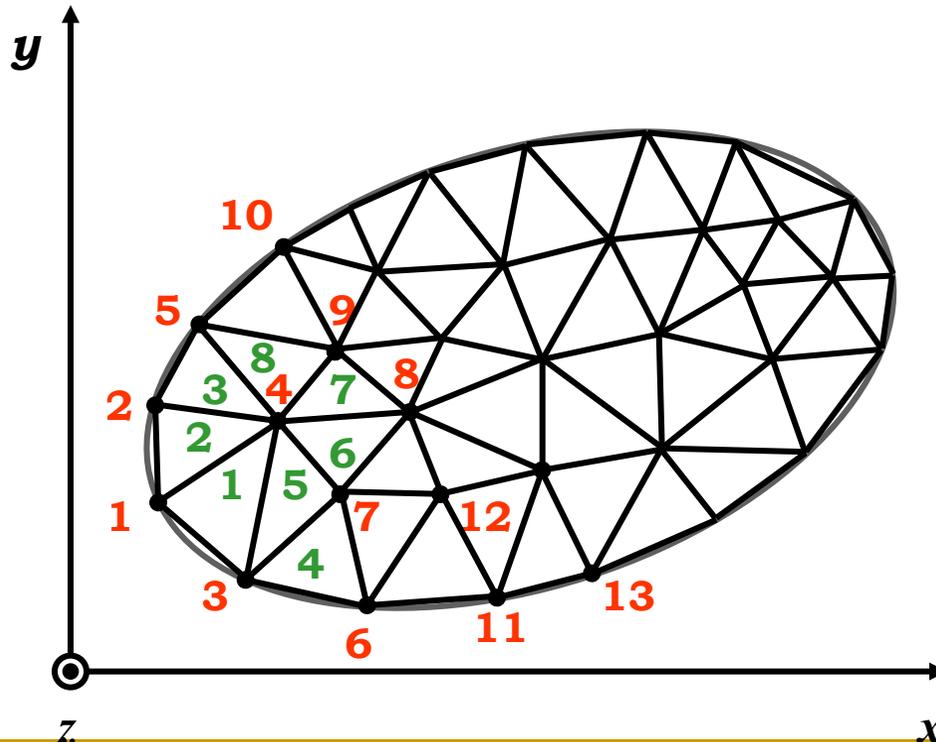
Formulações Clássicas do M.E.F.



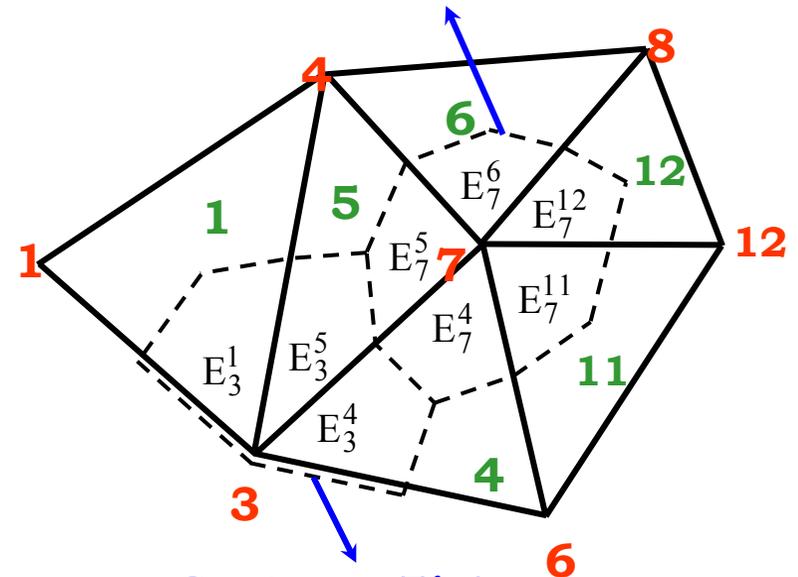
Regiões de Controle

• Numeração dos Nós

• Numeração dos Elementos



Contorno Típico
Envolvendo o Nó 7

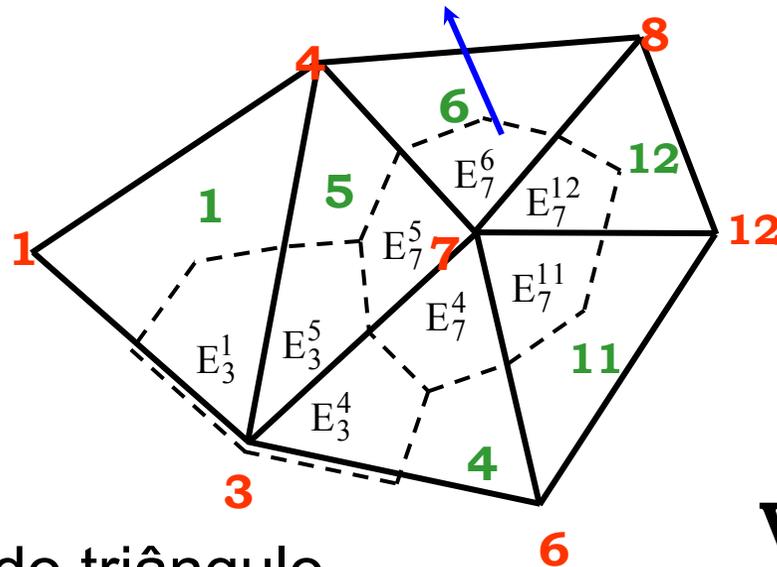


Contorno Típico
Envolvendo o Nó 3,
de Fronteira

Volume de Controle (Problema Eletrostático)

$$E_7^5 + E_7^6 + E_7^{12} + E_7^{11} + E_7^4 = \oint_{\Sigma_7} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

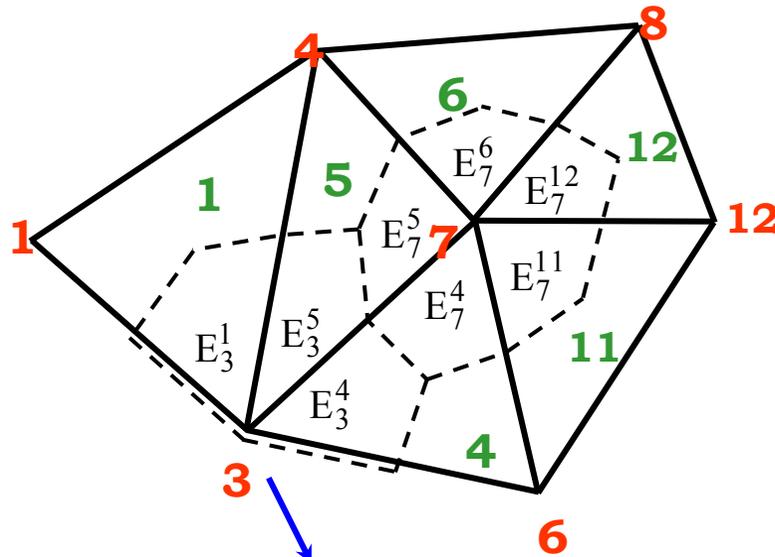
Contorno Típico
Envolvendo o Nó 7



Válido para qualquer
Nó “**interno**”

E_M^N Contribuição do triângulo
N ao fluxo em torno do nó M

Volume de Controle (Problema Eletrostático)



**Contorno Típico
Envolvendo o Nó 3,
de Fronteira**

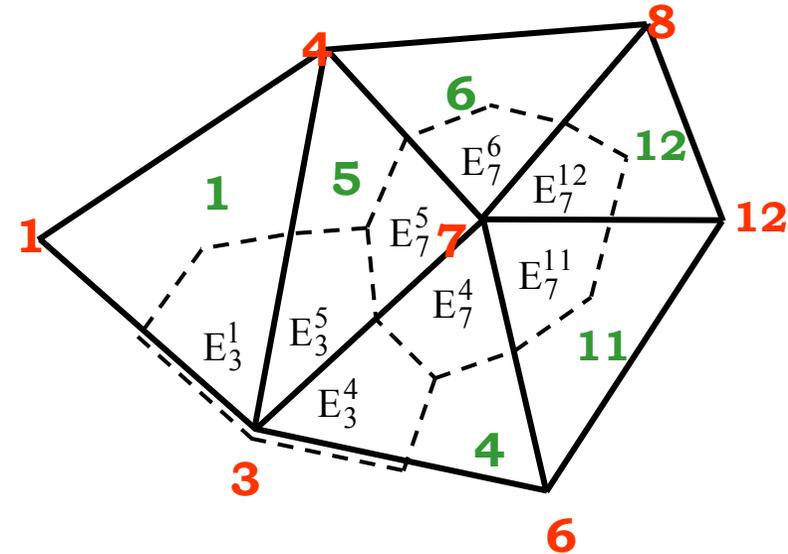
$$E_3^1 + E_3^5 + E_3^4 = \oint_{\Sigma_3} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

**Válido para qualquer
Nó na fronteira**

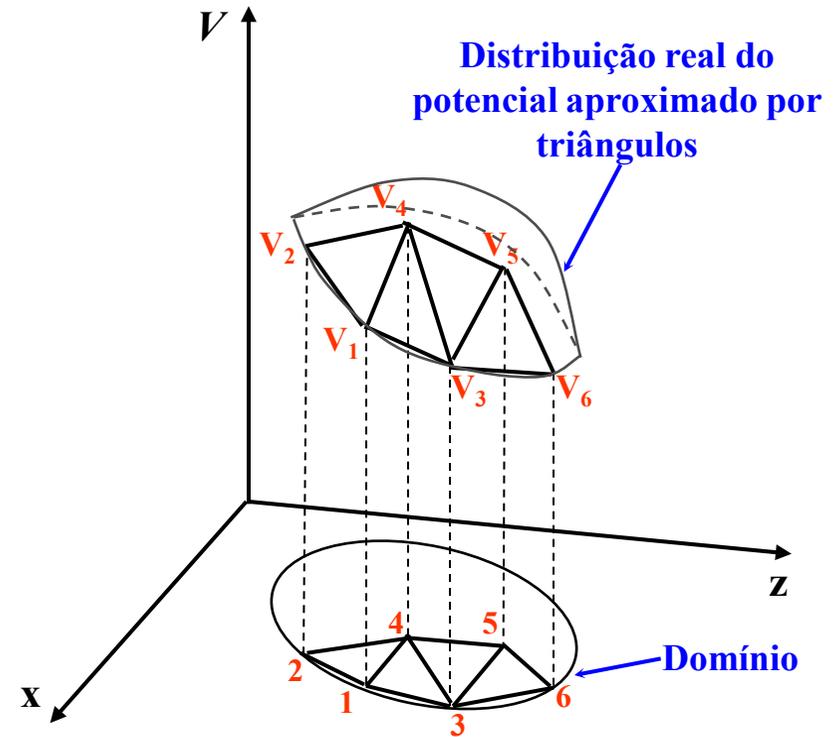
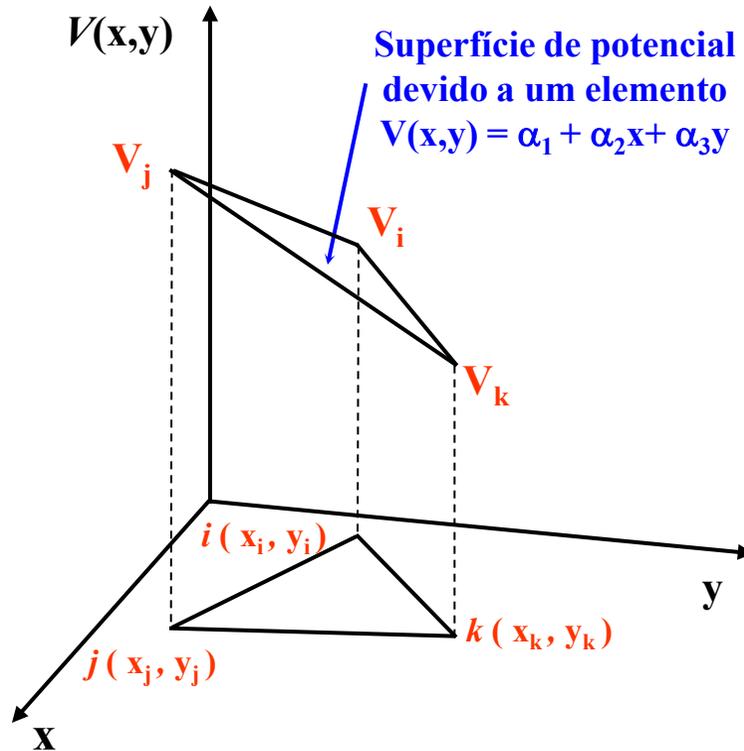
Volume de Controle (Problema Eletrostático)

Aplica-se a Lei de Gauss para todos os nós

$$\sum_{e=1}^{NE} E_i^e = \sum_{e=1}^{NE} Q_i^e$$



Aproximação do Potencial (V) Internamente ao Elemento



Aproximação Linear do Potencial (V)

no elemento

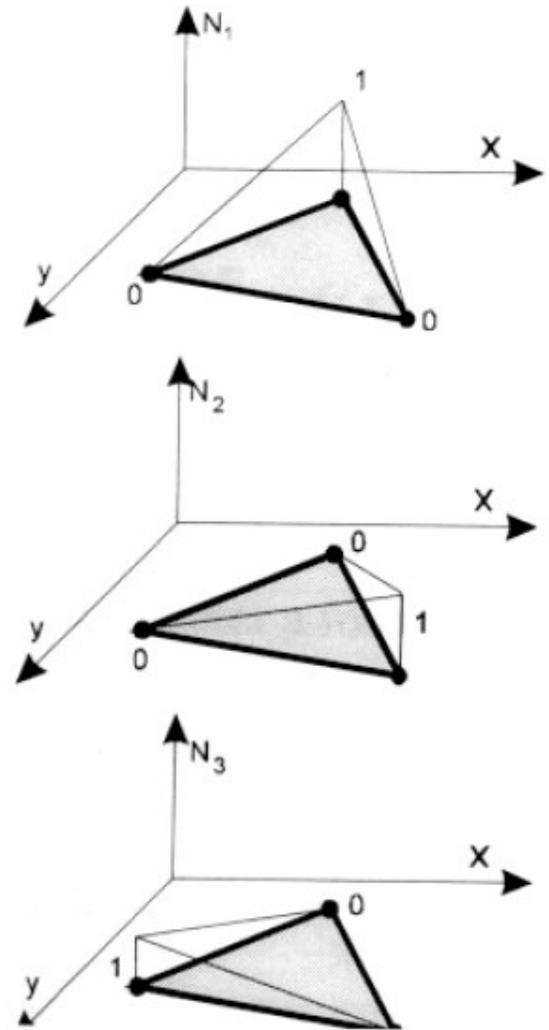
$$V(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \times V_i$$

Aproximação: Função de Forma

$N_i(x,y) \rightarrow$ função de forma

Propriedade:

$$N_i(x,y) = \begin{cases} se(x = x_i e y = y_i) = 1 \\ se(x = x_j e y = y_j) = 0 \\ se(x = x_k e y = y_k) = 0 \end{cases}$$



Aproximação: Função de Forma

Assim, se $N_i(x, y) = p_i + q_i x + r_i y$

$$\begin{cases} N_i(x_i, y_i) = p_i + q_i x_i + r_i y_i = 1 \\ N_i(x_j, y_j) = p_i + q_i x_j + r_i y_j = 0 \\ N_i(x_k, y_k) = p_i + q_i x_k + r_i y_k = 0 \end{cases}$$

3 equações e 3 incógnitas (p_i , q_i e r_i)

Aproximação: Função de Forma

$$N_i(x, y) = p_i + q_i x + r_i y$$

$$N_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}$$

$2\Delta \rightarrow 2 \times \text{Área do Triângulo}$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j; & b_i = y_j - y_k; & c_i = x_k - x_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_k; & b_j = y_k - y_i; & c_j = x_i - x_k \\ a_k = x_i y_j - x_j y_i; & b_k = y_i - y_j; & c_k = x_j - x_i \end{cases}$$

O Valor do Vetor Campo Elétrico e do Vetor Densidade de Fluxo Elétrico no Elemento

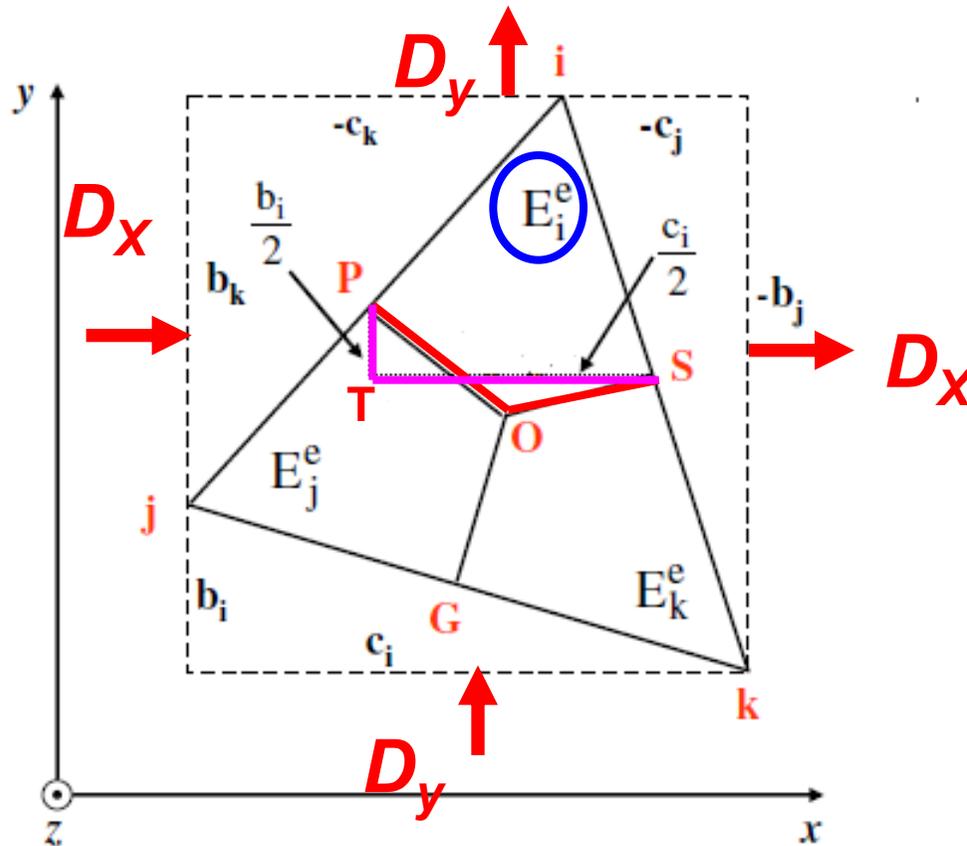
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \nabla \varphi$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\sum_{i=1}^3 \left(\frac{b_i \vec{u}_x}{2\Delta} + \frac{c_i \vec{u}_y}{2\Delta} \right) V_i$$

$$\vec{D} = \varepsilon \sum_{i=1}^3 \frac{(-b_i \vec{u}_x - c_i \vec{u}_y)}{2\Delta} V_i$$

Módulo dos dois Vetores é constante no elemento, pois φ varia linearmente tanto com x como y

Contribuições de um Elemento Genérico



$$E_i^e = ?$$

Fluxo de D por POS

$$E_i^e = \int_{POS} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

\vec{D} é constante no elemento

$$E_i^e = \int_{POS} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{PTS} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

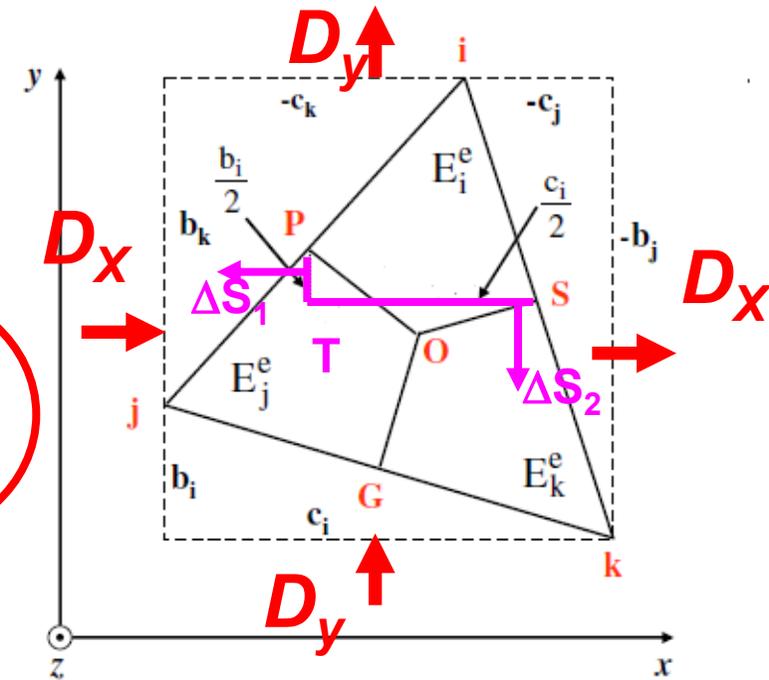
Contribuições de um Elemento Genérico

$$E_i^e = \int_{POS} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_P^T \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 + \int_T^S \vec{D} \cdot d\vec{S}_2$$

$$E_i^e = -D_x \cdot \Delta S_1 - D_y \cdot \Delta S_2$$

$$\Delta S_1 = (y_P - y_T) \times 1 = \frac{(y_j - y_k)}{2} \vec{u}_x = -\frac{b_i}{2} \vec{u}_x$$

$$\Delta \vec{S}_2 = (x_S - x_T) \times 1 = \frac{(x_k - x_j)}{2} \vec{u}_y = -\frac{c_i}{2} \vec{u}_y$$



Contribuições de um Elemento Genérico

\vec{D}

$$E_i^e = \left[\varepsilon \sum_{i=1}^3 \frac{(-b_i \vec{u}_x - c_i \vec{u}_y)}{2\Delta} V_i \right] \times \left(-\frac{b_i}{2} \vec{u}_x - \frac{c_i}{2} \vec{u}_y \right)$$

$$E_i^e = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \times \left[(b_i b_i + c_i c_i) + (b_i b_j + c_i c_j) + (b_i b_k + c_i c_k) \right]$$

Realizando o mesmo procedimento para os demais nós:

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações

- Obtém-se:

- $[K] [V] = [Q]$

- E cada linha é a Lei de Gauss aplicada para um determinado nó.

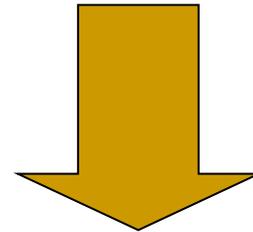
O Problema Magnetostático

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$



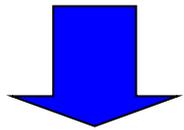
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{A} \rightarrow$ potencial vetor magnético

O problema Magnetostático em duas dimensões

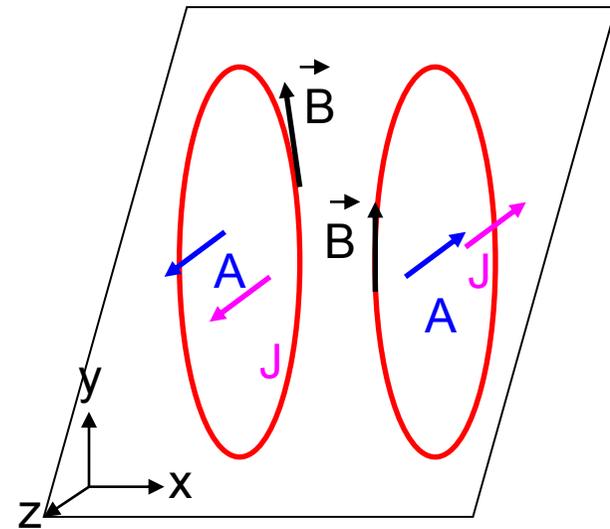
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Se por hipótese: $\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y$



$$\vec{A} = A_z \vec{u}_z$$

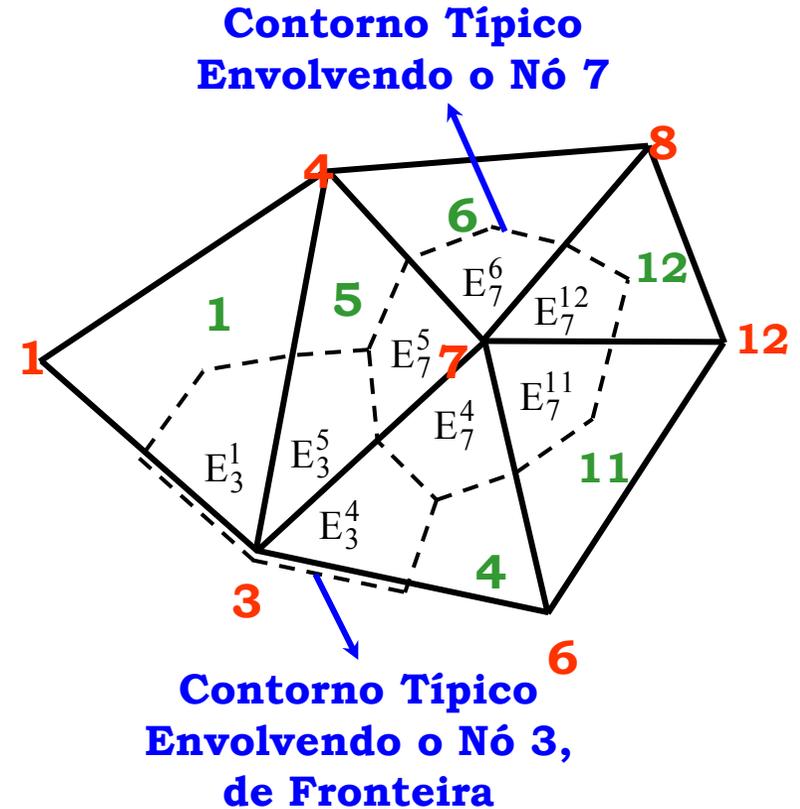
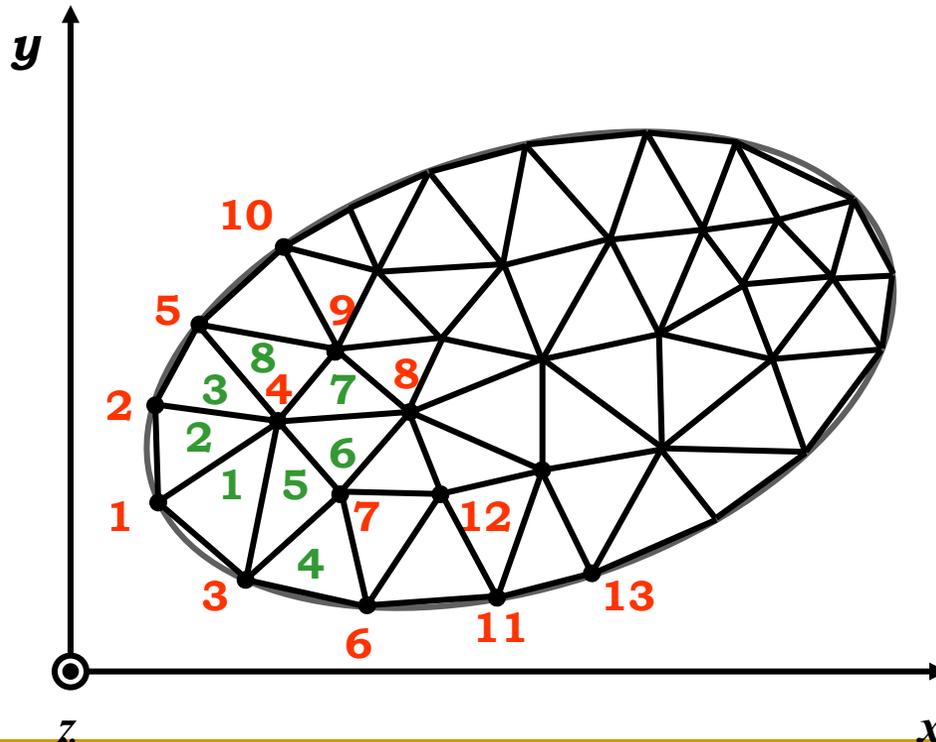
$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\nu \vec{B}) = \vec{J}$$



Regiões de Controle -Magnetostática

- Numeração dos Nós

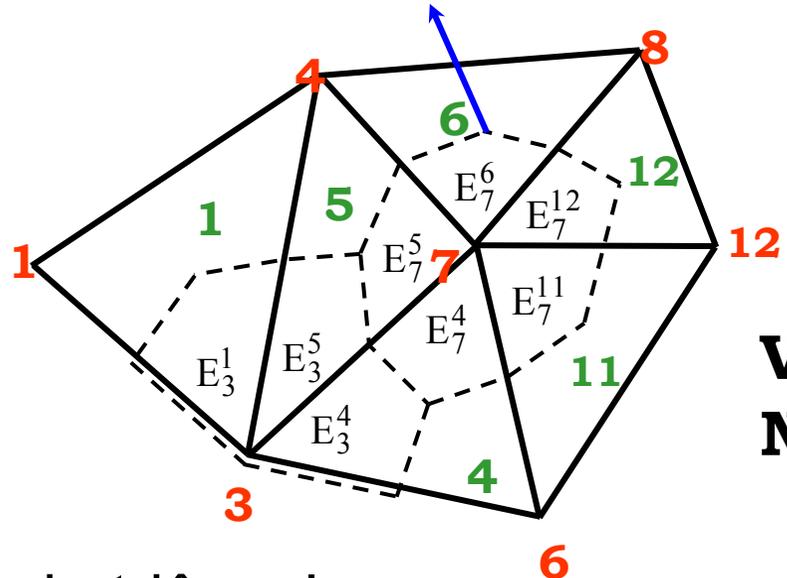
- Numeração dos Elementos



Volume de Controle (Problema Magnético)

$$E_7^5 + E_7^6 + E_7^{12} + E_7^{11} + E_7^4 = \oint_{\Sigma_7} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Contorno Típico
Envolvendo o Nó 7

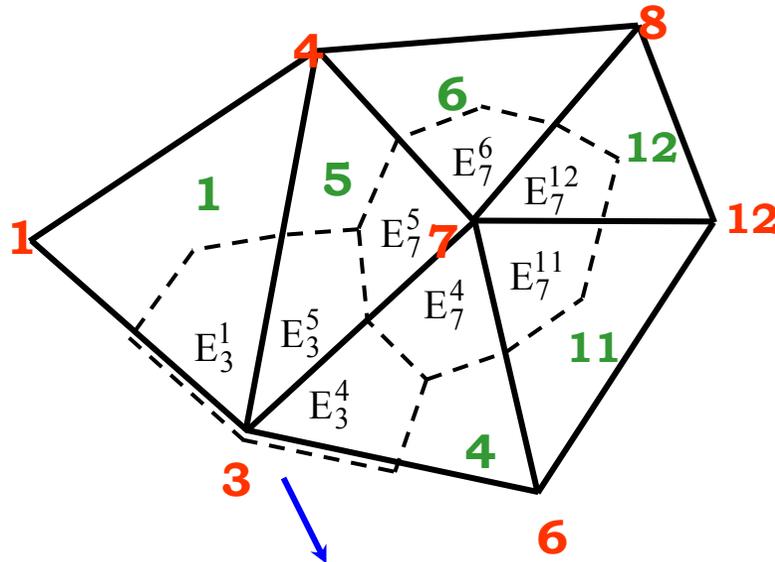


Válido para qualquer
Nó “**interno**”

E_M^N Contribuição do triângulo
N à circuitação de H em torno do nó M

Volume de Controle (Problema Magnético)

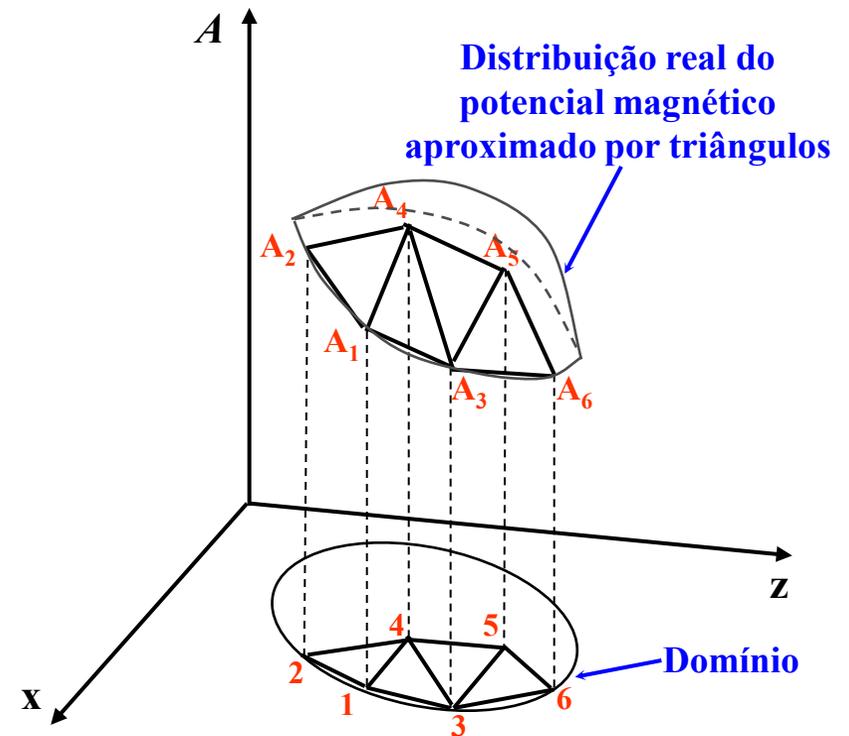
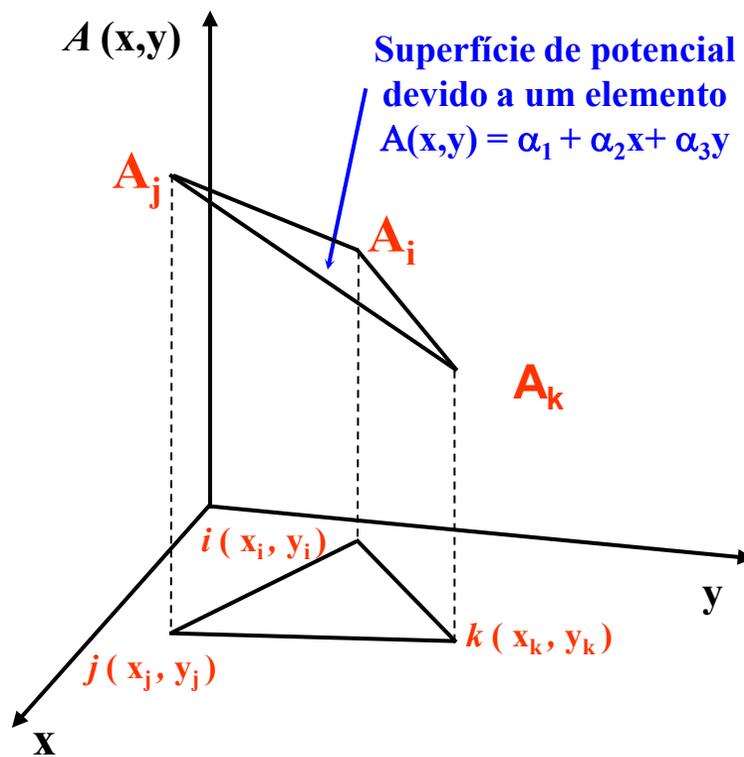
$$E_3^1 + E_3^5 + E_3^4 = \oint_{\Sigma_3} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



**Contorno Típico
Envolvendo o Nó 3,
de Fronteira**

**Válido para qualquer
Nó na fronteira**

Aproximação do Potencial Vetor Magnético Internamente ao Elemento



Aproximação Linear do Potencial Vetor Magnético (A)

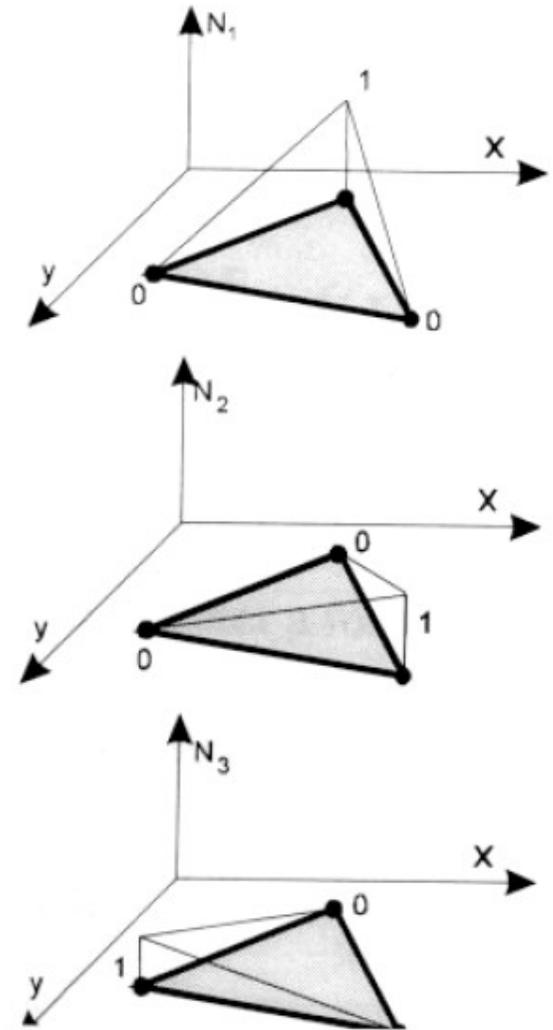
no elemento

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \times A_i$$

Aproximação: Função de Forma

Propriedade:

$$N_i(x, y) = \begin{cases} se(x = x_i e y = y_i) = 1 \\ se(x = x_j e y = y_j) = 0 \\ se(x = x_k e y = y_k) = 0 \end{cases}$$



O Valor do Campo Magnético no Elemento

$$\vec{H} = \nu \vec{B} = \nu \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{H} = \nu \sum_{i=1}^3 \frac{(c_i \vec{u}_x - b_i \vec{u}_y)}{2\Delta} A_i$$

Elemento Genérico

$$\int_{POS} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

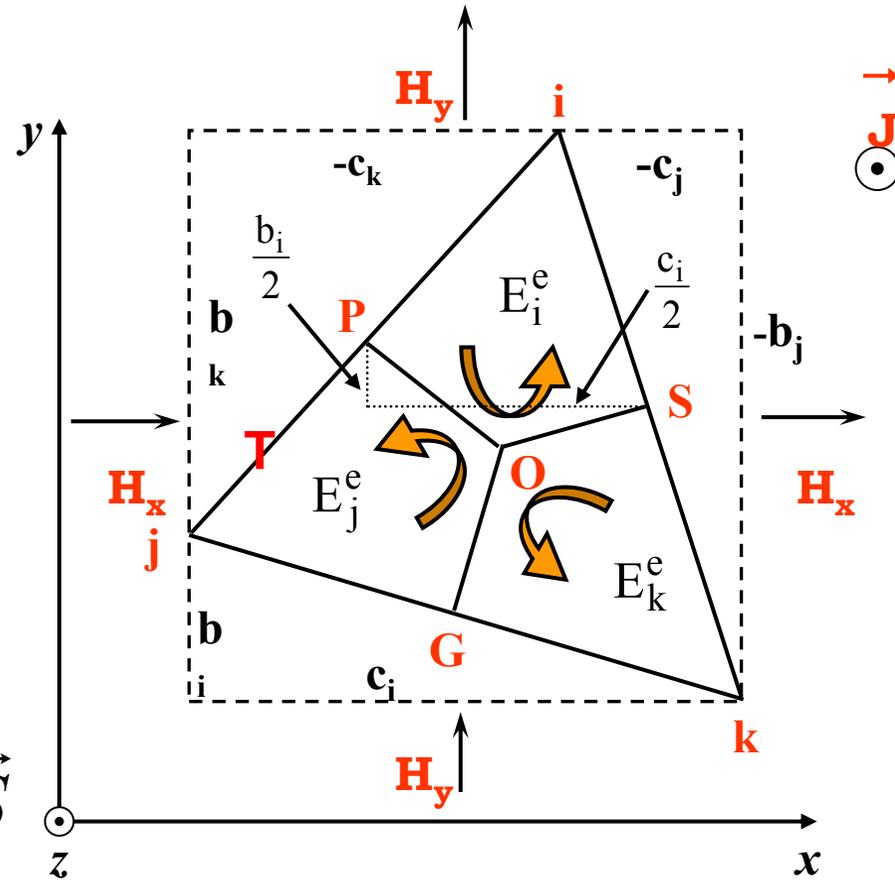
\vec{H} é constante no elemento

$$\int_{PT} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{TS} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$H_y \Delta y + H_x \Delta x = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$H_y (y_T - y_P) + H_x (x_S - x_T) = \iint_{iPOS} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Similar à Eletrostática



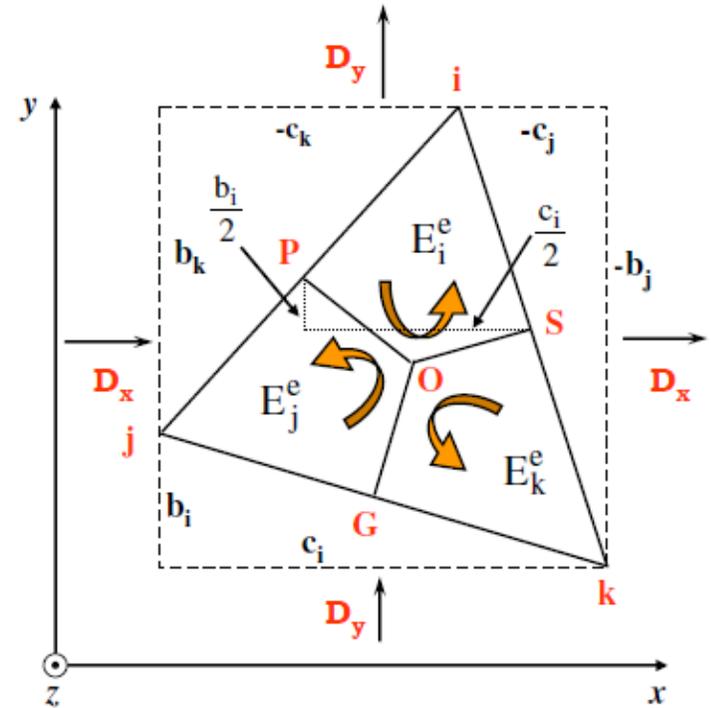
Elemento Genérico

$$\begin{bmatrix} E_i^e \\ E_j^e \\ E_k^e \end{bmatrix} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k & \\ b_k b_k + c_k c_k & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix}$$

A modelagem do termo da Corrente

- Caso exista densidade de corrente (J) no elemento, usualmente adota-se o seguinte procedimento para cada elemento:

$$I_i^e = I_j^e = I_k^e = \frac{J\Delta}{3}$$



Sistema de Equações

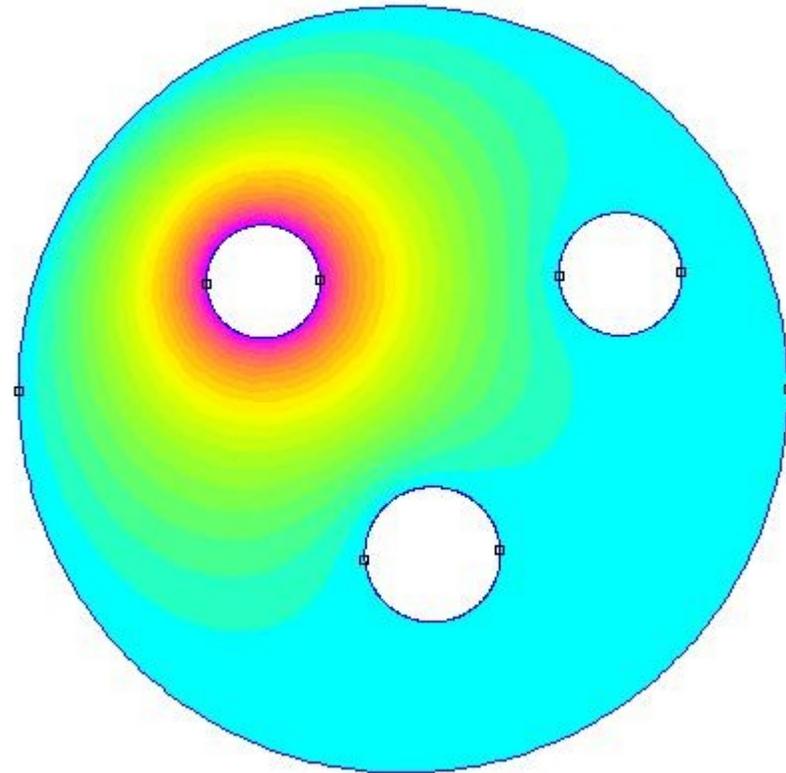
- Obtém-se:

- $[K] [A] = [I]$

- E cada linha é a Lei de Ampère aplicada para um determinado nó.

Um cabo energizado

Exemplo Eletrostática



- Fazer download de:
- <http://www.femm.info/wiki/HomePage>