Eletrromagnetismo I

Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 11

Separação de Variáveis em Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas, a Equação de Laplace é dada por

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Devido a $\sin^2 \theta$ aparecer na derivada em relação a φ , não é imediato fazer a separação de variáveis diretamente nas coordenadas r , θ e φ . Por isso, vamos considerar primeiro a separação em r ; fazendo

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$$

onde a função Y depende tanto de θ como de φ . Substituindo na Equação de Laplace, temos

$$\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0$$

Multiplicando todos os termos desta equação por $r^2/R Y$, obtemos

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0$$

O primeiro termo da equação só depende de r , enquanto que o segundo e o terceiro dependem de θ e φ . Como eles tem quem se anular para quais valores de r , θ e φ , fazemos

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \alpha^2; \quad \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2$$

Equação para $R(r)$

Iniciaremos com a equação para a função radial,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \alpha^2 R$$

Conforme explicaremos em aula, equações deste tipo em que a “dimensão” de todos os termos seja a variável dependente (R , neste caso) a solução deve ser a variável independente elevada a uma potência. Assim, vamos supor que a solução seja dada por

$$R = Cr^a; \quad C \text{ e } a \text{ constante}$$

Substituindo na equação, obtemos

$$Ca(a+1)r^a = \alpha^2 Cr^a \Rightarrow a(a+1) = \alpha^2$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha^2} \right]$$

Esta constante pode ser expressa de forma mais conveniente introduzindo uma outra constante, β , relacionada com α através da expressão

$$\alpha^2 = \beta(\beta+1) \Rightarrow a = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{(1+2\beta)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[-1 \pm (1+2\beta) \right]$$

Assim, as duas raízes são $a_1 = \beta$ e $a_2 = -(1+\beta)$, de forma que a solução geral para $R(r)$ é

$$R(r) = Ar^\beta + Br^{-(\beta+1)}$$

Neste ponto o livro texto já considera β um número inteiro, sem dar uma justificativa. A imposição de que β seja inteiro vem, na realidade, da solução da equação para $Y(\theta, \varphi)$, que leva aos chamados Harmônicos Esféricos.

Vamos discutir a solução desta equação, mas somente para o caso especial de configurações com simetria azimutal, isto é, $\partial\phi/\partial\varphi = 0$, de forma que a equação para $Y(\theta)$ fica:

$$\frac{1}{Y \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dY}{d\theta} \right) = -\beta(\beta+1)$$

ou

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{dY}{d\theta} \right) + \beta(\beta+1)Y = 0$$

As derivadas envolvendo $\operatorname{sen}\theta$ nos induz a seguinte transformação de variáveis:

$$x = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \frac{d}{dx}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{dY}{d\theta} \right) &= \frac{-1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}^2\theta \frac{dY}{dx} \right) \\ &= -2\cos\theta \frac{dY}{dx} + \operatorname{sen}^2\theta \frac{d^2Y}{dx^2} \\ &= (1-x^2) \frac{d^2Y}{dx^2} - 2x \frac{dY}{dx} \end{aligned}$$

Portanto, em termos da variável $x = \cos\theta$, a equação fica:

$$(1-x^2) \frac{d^2Y}{dx^2} - 2x \frac{dY}{dx} + \beta(\beta+1)Y = 0 \quad -1 \leq x \leq 1$$

Dividindo a equação por $1-x^2$, temos

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dY}{dx} + \frac{\beta(\beta+1)}{1-x^2} Y = 0$$

Vemos que nos pontos $x \pm 1$ os segundo e terceiro termos da equação divergem, ou seja, estes pontos são polos (pontos singulares) da equação. Como a equação é de segundo grau, existem duas soluções. Nos pontos singulares pelo menos uma das soluções diverge. Nos problemas físicos naturalmente buscamos soluções não divergentes, ou seja, temos que procurar a solução apropriada.

Para prosseguir, vamos supor que a solução possa ser desenvolvida em série de potências (Método de Frobenius), ou seja,

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Naturalmente esperamos que, para a solução não divergente, esta série convirja. Então:

$$\frac{dY}{dx} = \sum_n n c_n x^{n-1}; \quad x \frac{dY}{dx} = \sum_n n c_n x^n$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 Y}{dx^2} = \sum_n n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_n n(n-1) c_n x^n$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$\sum_n n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_n n(n-1) c_n x^n - 2 \sum_n n c_n x^n + \beta(\beta+1) \sum_n n c_n x^n = 0$$

Multiplicando todos os termos por x^2 e reagrupando os termos, temos

$$\sum_n n(n-1) c_n x^n - \sum_n c_n [n(n+1) - \beta(\beta+1)] x^{n+2} = 0$$

Para que esta relação seja válida, para qualquer valor de x , é necessário que os coeficientes de cada potência de x se anule. Assim, vamos considerar potência a potência

$$\underline{x^0} \quad 0 \cdot (-1) \cdot c_0 x^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{c_0 \text{ é arbitrário}}$$

$$\underline{x^1} \quad 1 \cdot (1-1) \cdot c_1 x^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{c_1 \text{ é arbitrário}}$$

$$\underline{x^2} \quad 2 \cdot (2-1) \cdot c_2 x^2 - c_0 [0 \cdot 1 - \beta(\beta+1)] x^2 = 0$$

$$\therefore c_2 = -\frac{\beta(\beta+1)}{2} c_0$$

$$\underline{x^3} \quad 3 \cdot (3-1) \cdot c_3 x^3 - c_1 [1 \cdot (1+1) - \beta(\beta+1)] x^3 = 0$$

$$\therefore c_3 = \frac{2 - \beta(\beta+1)}{6} c_1$$

$\vdots$

$$\underline{x^{n+2}} \quad (n+2)(n+2-1) c_{n+2} x^{n+2} - c_n [n(n+1) - \beta(\beta+1)]^{n+2} x^{n+2} = 0$$

$$\boxed{\therefore c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \beta(\beta+1)}{(n+2)(n+1)} c_n}$$

Esta relação de recorrência liga os coeficientes da série, indicando que todos os coeficientes podem ser obtidos a partir de c_0 e c_1 , que são as duas constantes arbitrárias da solução da equação de segundo grau.

Para testar se a série converge, fazemos o teste da razão entre dois termos, em sequência

que dependem da mesma constante (c_0 ou c_1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+2}}{c_n} = \frac{n(n+1) - \beta(\beta+1)}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

Portanto a série diverge e a solução aparentemente não serve. Mas há uma situação especial em que a convergência é possível.

Suponhamos agora que a constante β seja um inteiro, ou seja,

$$\beta = \ell$$

Neste caso, quando $n = \ell$, o coeficiente $c_{\ell+2}$ se anula e todos os outros coeficientes seguintes se anulam. Então, ao invés de uma série, obtemos um polinômio de grau ℓ , denominado Polinômio de Legendre, que satisfaz a Equação de Legendre,

$$(1-x^2) \frac{d^2 Y}{dx^2} - 2x \frac{dY}{dx} + \ell(\ell+1)Y = 0; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

As soluções, propriamente normalizadas, são escritas como

$$Y(x) = P_\ell(x)$$

onde os Polinômios de Legendre são

$$P_0(x) = 1 \qquad P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 30x^2 + 3)$$

$$P_1(x) = x \qquad \text{-----}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \qquad P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d^\ell}{dx^\ell} \right) (x^2 - 1)^\ell$$

onde a expressão $P_\ell(x)$ é capaz de determinar qualquer polinômio de grau ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$, e é chamada fórmula de Rodrigues.

Assim, a solução geral da Equação de Laplace, para problemas com simetria azimutal é:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right] P_\ell(\cos \theta)$$