ZEB0763 – Economia 22.10.2018

PRODUTO TOTAL E PRODUTO MARGINAL

A LEI DE MITSCHERLICH - Nas primeiras décadas do século XX, Eilhard Alfred Mitscherlich (1874-1956) publicou alguns trabalhos que estudavam a relação entre o produto de uma cultura vegetal e a oferta de nutrientes. A relação entre essas variáveis ficou conhecida como a Lei de Mitscherlich, que pode ser expressa como

$$y = A\left[1 - 10^{-c(x+b)}\right]$$

em que y é a quantidade produzida por unidade de área e x é a quantidade de nutriente aplicada por unidade de área da cultura. A, b, c são parâmetros que representam respectivamente a produção máxima possível da cultura, a oferta do nutriente presente naturalmente no solo, e o coeficiente de eficácia no nutriente na cultura considerada.

O produto marginal do nutriente considerado é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ln(10)Ac}{10^{c(x+b)}}$$

Os Gráficos 1 e 2 representam respectivamente o produto total e o produto marginal do nutriente considerado.

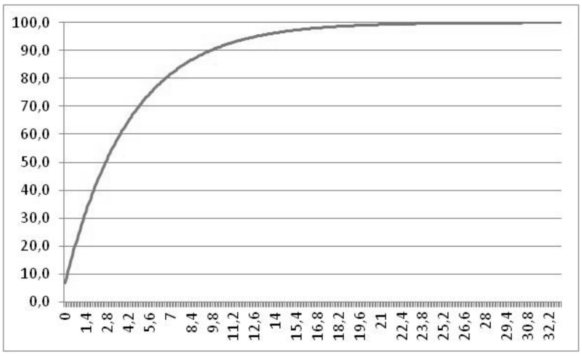

Gráfico 1 – Produto total do nutriente (função de produção): A=100; b=0,3; c=0,1

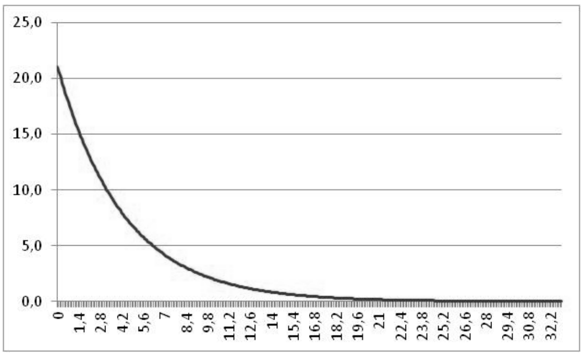

Gráfico 2 – Produto marginal do nutriente: A=100; b=0,3; c=0,1

A=100; b=0,3; c=0,1

Questões:

Considerando a aplicação de 4 unidades do nutriente em uma unidade de área da cultura:

1. Encontre o produto total correspondente. ($x = 4 \rightarrow y = ?$)

2. Encontre o produto marginal do nutriente ($x = 4 \rightarrow dy/dx = ?$)

Suponha agora que o preço do produto é p = 2, e o do nutriente, w = 1

3. Determine a quantidade de nutriente x* que maximiza o lucro do produtor (π)

$$\max_x \pi = py - wx = p\, A\left[1 - 10^{-c(x+b)}\right] - wx$$

4. Encontre a demanda do insumo x, em função da quantidade produzida. ($x = f(y)$)

5. Escreva a função custo variável. $CV(y) = g(w, y)$

As quantidades dos demais insumos e serviços produtivos (sementes, água, trabalho ...) não variam. A despesa com esses insumos e serviços durante o ciclo de produção é igual a $ 10.

6. Escreva a função Custo Total, $C(w, y)$, considerando que o custo total é a soma do custo fixo e do custo variável.

1. Produto Total, x = 4. (Quantas unidades de produto serão obtidas se forem aplicadas 4 unidades de insumo?)

$$y = A\left[1 - 10^{-c(x+b)}\right]$$

$$y = 100\left[1 - 10^{-0,1(4+0,3)}\right] = 100\ [1 - \ 10^{-0,43}] = 62,8$$

2. Produto Marginal, x = 4. (Qual é a taxa de variação do produto total quando são aplicadas 4 unidades do insumo? A que "velocidade" (Δy/Δx)a produção cresce se às 4 unidades de insumo for acrescentada uma "pequena" quantidade adicional (Δx)?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ln(10)Ac}{10^{c(x+b)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ln(10)100\ 0,1}{10^{0,1(4+0,3)}} = \frac{2,3026\ .\ 10}{2,6915} = 8,56$$

3. Quantidade de insumo que maximiza o lucro (x*)

$$\max_x \pi = py - wx = p\ A\left[1 - 10^{-c(x+b)}\right] - wx$$

$$\max_x \pi = 2y - x = 2\ 100\left[1 - 10^{-0,1(x+0,3)}\right] - x$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 2\frac{\ln(10)\ 100\ 0,1}{10^{0,1(x+0,3)}} - \ 1 = 0$$

Na quantidade ótima de insumo (x* que é solução do problema), o valor do produto marginal (p dy/dx) é igual ao preço do insumo (w).

$$\frac{23,0259}{10^{0,1(x+0,3)}} = \frac{1}{2}$$

$$10^{0,1(x+0,3)} = 46,0517$$

$$0,1(x + 0,3) = \ \log_{10} 46,0517 = \ 1,6633$$

$$x = \frac{1,6633 - 0,03}{0,1} = 16,3$$

4. Demanda do insumo (x), condicionada à quantidade produzida (y) (Qual é a quantidade suficiente de insumo para produzir y unidades do produto?)

$$y = A\left[1 - 10^{-c(x+b)}\right]$$

$$\frac{y}{A} = 1 - 10^{-c(x+b)}$$

$$\frac{y}{A} - 1 = 10^{-c(x+b)}$$

$$1 - \frac{y}{A} = 10^{-c(x+b)}$$

$$-c(x+b) = \log\left(1 - \frac{y}{A}\right)$$

$$x = -\frac{1}{\mathrm{c}} \log\left(1 - \frac{y}{A}\right) - b$$

A=100; b=0,3; c=0,1

$$x = -10 \log\left(1 - \frac{y}{100}\right) - 0{,}3$$

$$x = -10 \, \frac{ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{ln(10)} - 0{,}3$$

5. Custo Variável (Quanto será preciso gastar para obter as x unidades de insumo necessárias para se obter a quantidade de produto desejada?)

$$CV(y) = wx = w\left(-10 \, \frac{ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{ln(10)} - 0{,}3\right)$$

6. Custo Total = Custo Variável + Custo Fixo (CF = 10; w = 1)

$$C(y) = 9{,}7 - 10 \, \frac{ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{ln(10)}$$

Podemos recolocar o problema do produtor (questão 3), tendo como variável de escolha a quantidade produzida (y), ao invés da quantidade de insumo (x) a ser utilizada.

7. Qual a quantidade produzida que maximiza o lucro?
   (CF = 10; w = 1; p = 2; firma tomadora de preços → preço não depende de y)

   Lucro (π) = Receita Total – Custo Total = py – C(y)

$$\max_{y} \pi = py - C(y) = 2y - \left(9{,}7 - 10 \, \frac{ln\left(1 - \frac{y}{100}\right)}{ln(10)}\right)$$

Condição de primeira ordem da solução

$$\frac{d\pi}{dy} = p - \frac{dC}{dy} = 0 \;\; \Rightarrow preço\ do\ produto = custo\ marginal$$

$$2 = -\frac{10}{ln(10)(y-100)} \Rightarrow \; y^* = \; 100 - \frac{10}{2\;ln(10)} = 97{,}8$$

8. A oferta da firma tomadora de preços

$$CV(y) = w\left(-\frac{1}{c}\log\left(1-\frac{y}{A}\right) - b\right)$$

$$\frac{dC}{dy} = -\frac{w}{c\;\ln 10\;(y-100)}$$

Como, para maximizar o lucro, a firma tomadora de preços produz a quantidade y* para a qual o preço do produto é igual ao custo marginal, a oferta da firma será:

$$y = 100 - \frac{w}{p\;c\;\ln 10}$$