ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 19

Cap 3.3 – Definição de algoritmo

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

O que é um algoritmo?

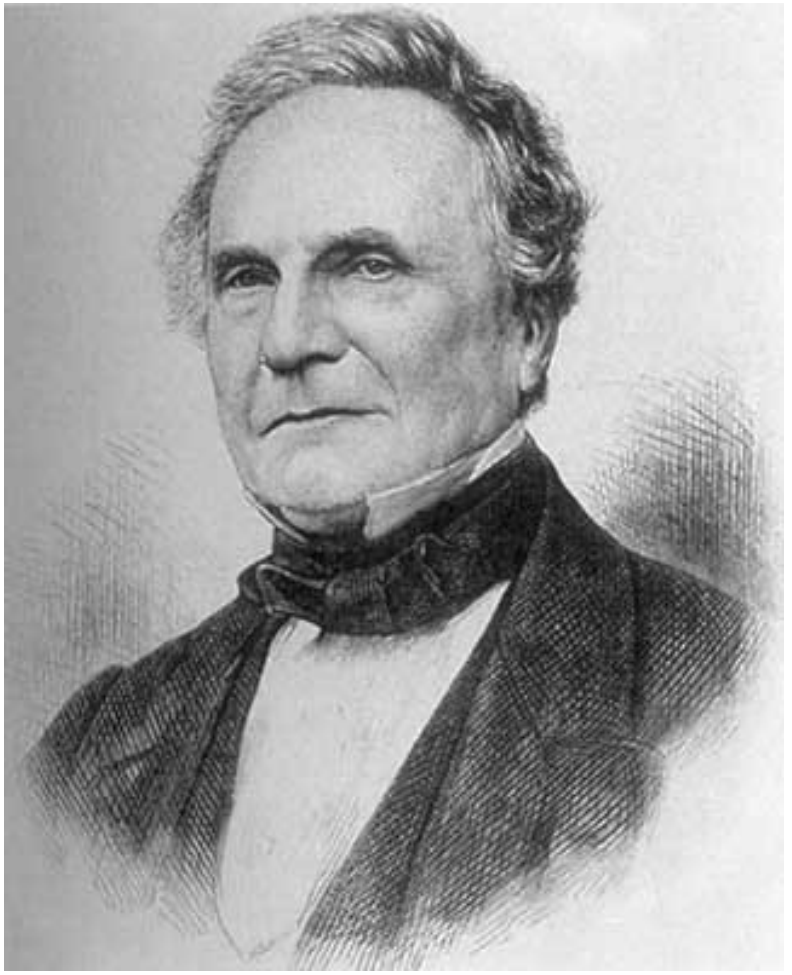
O que é um algoritmo?

Muito “usado” há tempos, mas formalmente definido apenas no século XX

Um pouco de história

Charles Babbage (inglês)

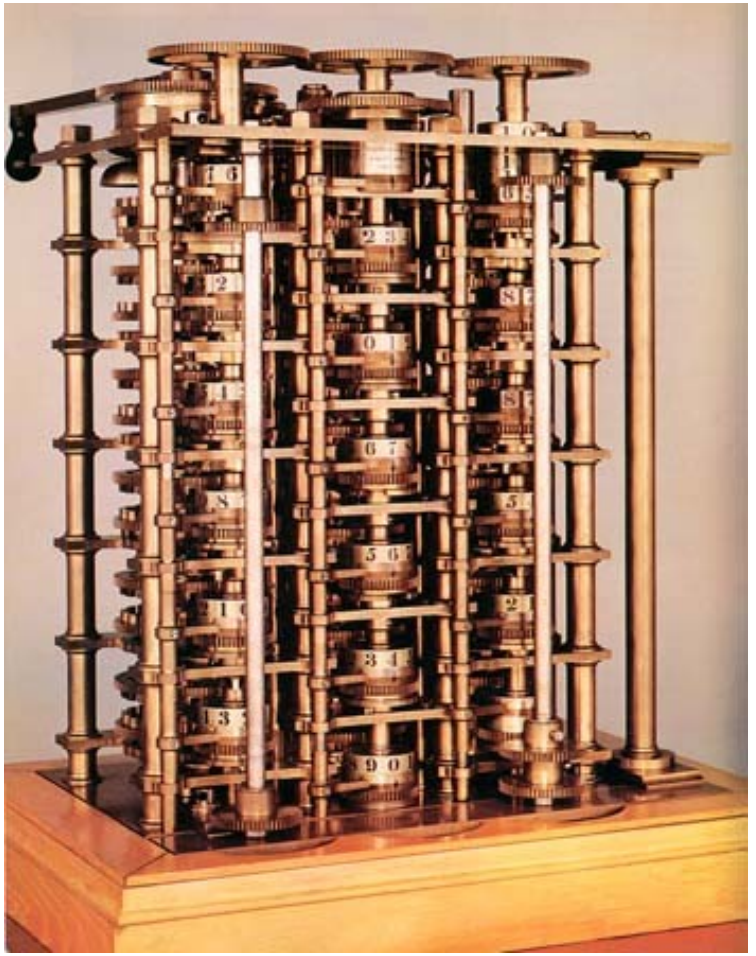
- Notou:
  - Muitos erros em tabelas de cálculos
  - Que muito do que se fazia em matemática poderia ser automatizado
- Iniciou projeto da máquina de diferenças (*Difference Engine*).
- Capaz de resolver equações polinômicas



1812

Máquina de Diferenças

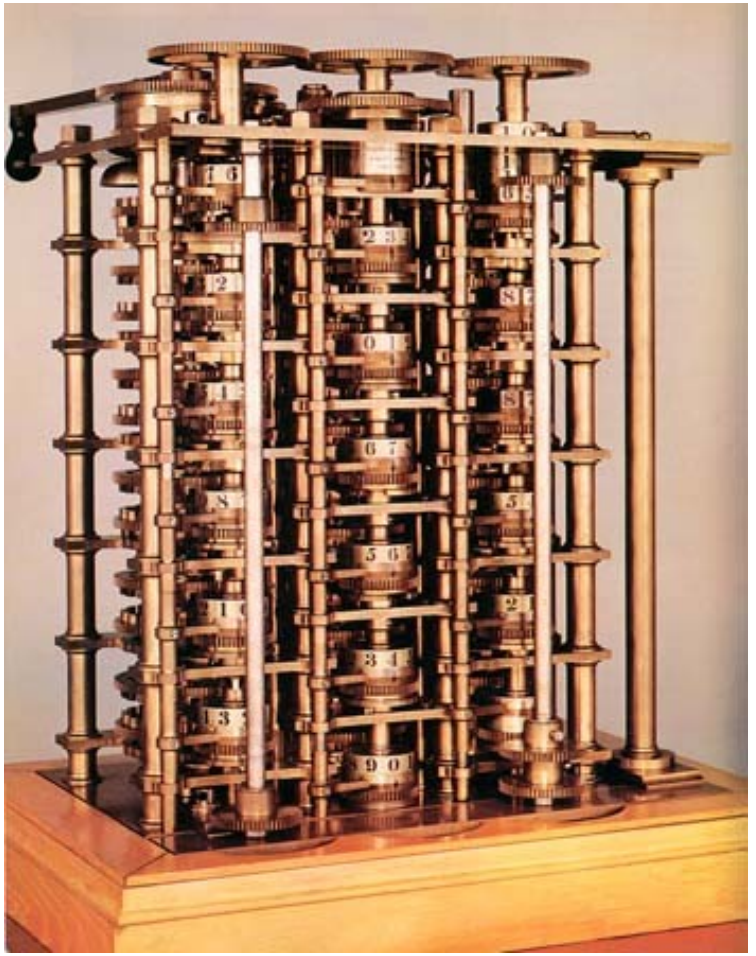
- 1822: terminou um protótipo de máquina e obteve financiamento do governo inglês para construí-la.



1822 - 1823

Máquina de Diferenças

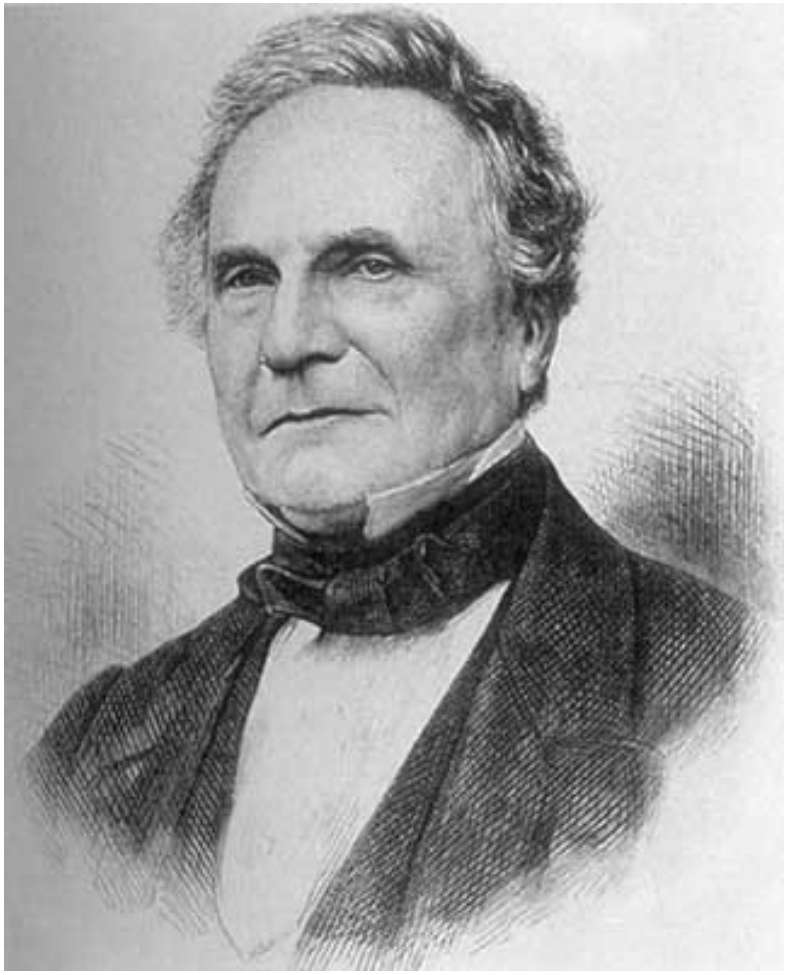
- 1823: iniciou construção (usaria motor a vapor, seria totalmente automático, imprimiria o resultado e teria um programa fixo).
  - Mudar o cálculo implicaria em mudar as engrenagens



1822 - 1823

Charles Babbage (inglês)

- 1833: Teve uma idéia melhor e abandonou tudo.
- Nova idéia: máquina *programável*, de propósito geral: máquina analítica (*Analytical Engine*).
- Ponto de partida para os computadores eletrônicos!



1833

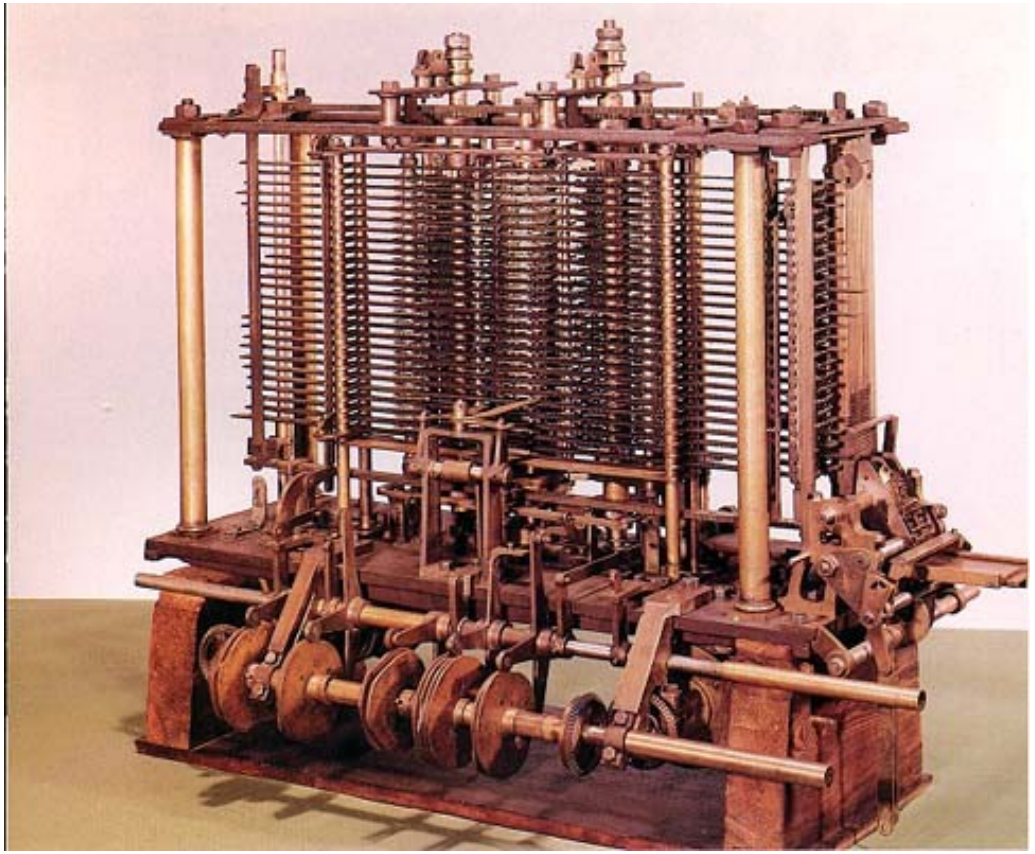
Máquina Analítica - programável

- Manipularia números de 50 dígitos

Memória de 1000 dígitos

Estações de leitura: cartões perfurados (programas!)

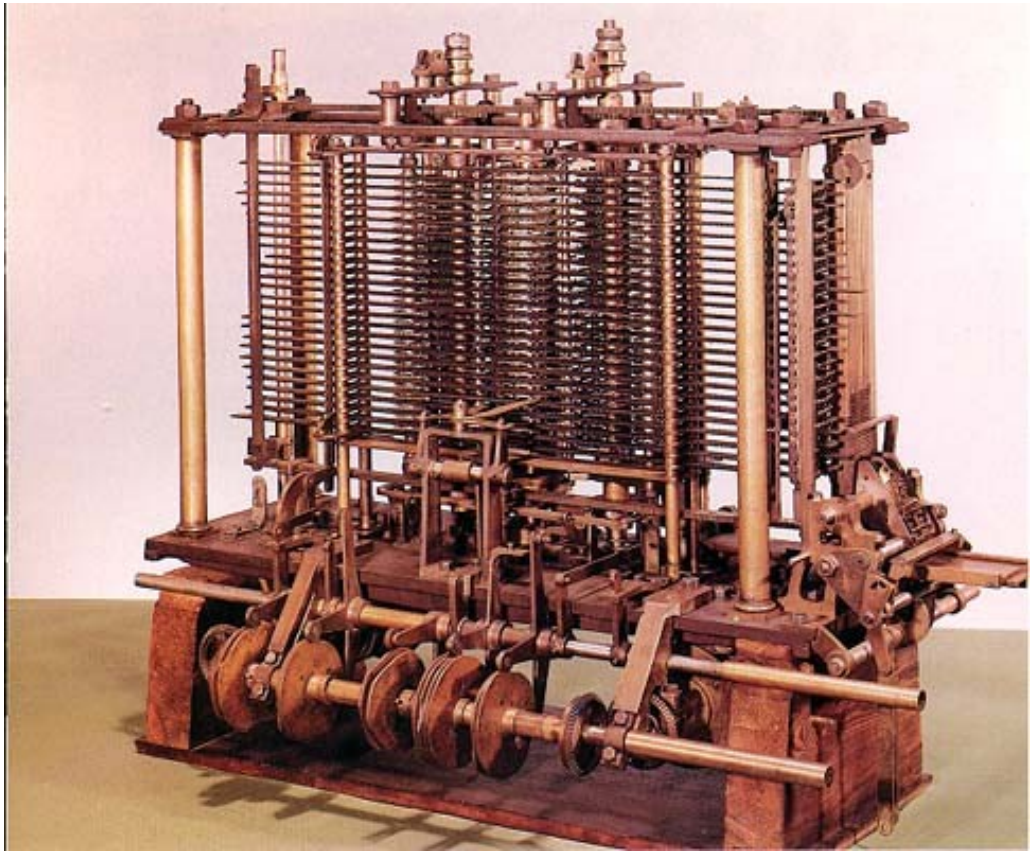
- Pai da computação



1833

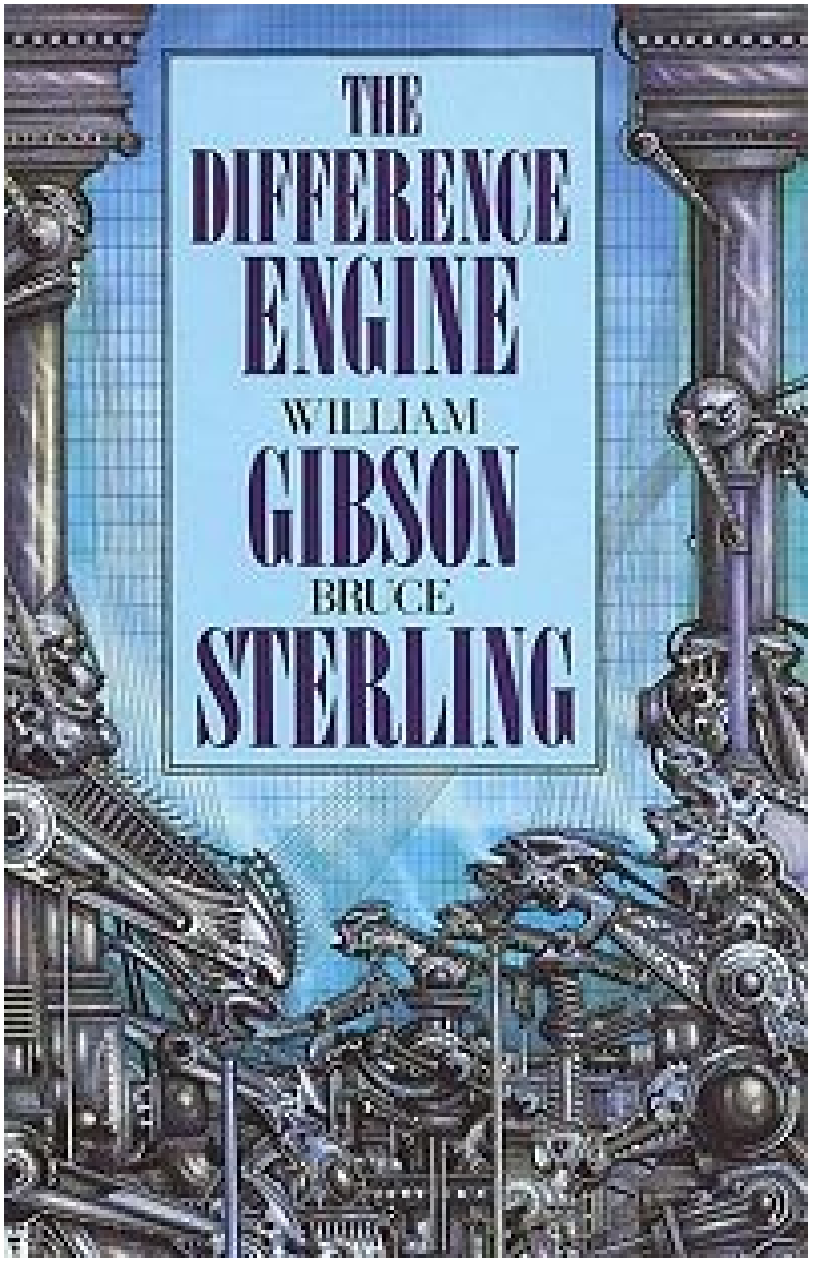
Máquina Analítica - programável

- Continuou a trabalhar no projeto até sua morte
- Não conseguiu construir
  - Tecnologia mecânica da época era insuficiente (???)
  - Pouca gente via a necessidade para tal máquina.



1833-1871

Livro de ficção



Programas para a máquina analítica

1833-1871

Programas para a máquina analítica

- Ada Lovelace (*mãe da programação*)
- Criou sub-rotinas, loops, saltos condicionais,…
- Inventou a palavra **algoritmo** em homenagem ao matemático Al-Khawarizmi (820 D.C.).

1833-1871

Programas para a máquina analítica

- **Algoritmo:** sequência de operações ou comandos que, aplicada a um conjunto de dados, permite solucionar classes de problemas semelhantes.
- Ex:
  - algoritmo da divisão,
  - da raiz cúbica,
  - para resolução de equações de segundo grau,
  - Etc.

1833-1871

Um pouco de história

- 1900 – palestra do matemático David Hilbert
  - 23 desafios matemáticos para o próximo século
  - Décimo problema: “um processo pelo qual possa ser determinado, com um número finito de operações”, se um polinômio tem raízes inteiras.
- 1936 – artigos de Alonzo Church e Alan Turing definindo formalmente um algoritmo
  - Church com lambda-cálculo
  - Turing com Máquinas de Turing
  - As duas formulações são equivalentes

Tese de Church-Turing

Noção intuitiva de algoritmos	é igual a	*algoritmos de máquina de Turing*

Algoritmo para o problema de Hilbert

- Problema de Hilbert:

"um processo pelo qual possa ser determinado, com um número finito de operações", se um polinômio tem raízes inteiras

- 1970 – Yuri Matijasevic mostrou que não existe tal "processo" (ou algoritmo)

Algoritmo para o problema de Hilbert

- Problema de Hilbert:

D = { p | p é um polinômio com uma raiz inteira}

D é decidível?

Algoritmo para o problema de Hilbert

- Problema de Hilbert:

  D = { p | p é um polinômio com uma raiz inteira}

  D é decidível?

- 1970 – Yuri Matijasevic mostrou que não
- Próximo capítulo: como fazer esse tipo de prova.

Problema simplificado

$D_1 = \{p \mid p \text{ é um polinômio sobre } x \text{ com uma raiz inteira}\}.$

Problema simplificado

$$D_1 = \{p \mid p \text{ é um polinômio sobre } x \text{ com uma raiz inteira}\}.$$

Aqui está uma MT M_1 que reconhece D_1:

M_1 = "A entrada é um polinômio p sobre a variável x.

1. Calcule o valor de p com x substituída sucessivamente pelos valores $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Se em algum ponto o valor do polinômio resulta em 0, *aceite*."

Decidível?

Problema simplificado

$$D_1 = \{p \mid p \text{ é um polinômio sobre } x \text{ com uma raiz inteira}\}.$$

Aqui está uma MT M_1 que reconhece D_1:

M_1 = "A entrada é um polinômio p sobre a variável x.

1. Calcule o valor de p com x substituída sucessivamente pelos valores $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Se em algum ponto o valor do polinômio resulta em 0, *aceite*."

Decidível? Sim...
As raízes de um polinômio de uma só variável devem residir entre os dois valores:

$$\pm k \frac{c_{\text{máx}}}{c_1},$$

onde k é o número de termos no polinômio, $c_{\text{máx}}$ é o coeficiente com o maior valor absoluto, e c_1 é o coeficiente do termo de mais alta ordem. Se uma raiz não for encontrada dentro desses limitantes, a máquina *rejeita*.

O problema original

Matijasevic mostra que, para polinômios com várias variáveis, não é possível calcular tais limitantes

Logo, D é

O problema original

Matijasevic mostra que, para polinômios com várias variáveis, não é possível calcular tais limitantes

Logo, D é Turing-reconhecível mas não Turing-decidível

Terminologia para descrever Máquinas de Turing

- Mudança de foco no curso: algoritmos
  - Máquina de Turing como modelo
  - Precisamos estar convencidos de que podemos descrever qualquer algoritmo com uma máquina de Turing

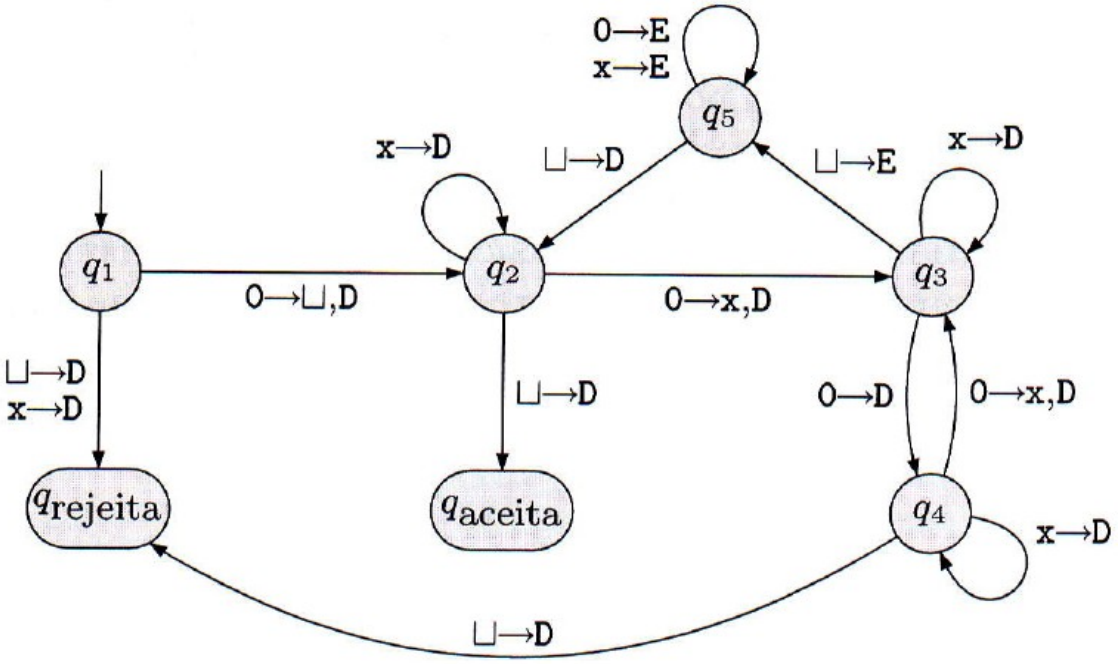
Terminologia para descrever Máquinas de Turing

- 3 níveis de descrição de algoritmos:
  - **Descrição formal**: detalhes da máquina: estados, função de transição, etc.
  - **Descrição de implementação**: escrito em língua natural para descrever como a máquina move a cabeça da fita, lê e escreve dados, etc (sem descrever estados ou função de transição)
  - **Descrição de alto nível**: escrito em língua natural para descrever um algoritmo, omitindo detalhes de implementação

Exemplo – descrição formal (se o nr de zeros de uma cadeia é uma potência de 2)

Agora, damos a descrição formal de $M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}})$:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}}\}$,
- $\Sigma = \{0\}$ e
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.
- Descrevemos δ com um diagrama de estados (veja a Figura 3.8).
- Os estados inicial, de aceitação e de rejeição são q_1, q_{aceita} e q_{rejeita}.



Exemplo – descrição de implementação (se o nr de zeros de uma cadeia é uma potência de 2)

EXEMPLO 3.7

Aqui descrevemos uma máquina de Turing (MT) M_2 que decide $A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$, a linguagem consistindo em todas as cadeias de 0s cujo comprimento é uma potência de 2.

M_2 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura da esquerda para a direita na fita, marcando um 0 não, e outro, sim.
2. Se no estágio 1, a fita continha um único 0, *aceite*.
3. Se no estágio 1, a fita continha mais que um único 0 e o número de 0s era ímpar, *rejeite*.
4. Retorne a cabeça para a extremidade esquerda da fita.
5. Vá para o estágio 1."

Exemplo – descrição de alto nível (se um polinômio sobre x tem raiz inteira)

M_1 = "A entrada é um polinômio p sobre a variável x.

1. Calcule o valor de p com x substituída sucessivamente pelos valores $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Se em algum ponto o valor do polinômio resulta em 0, *aceite*."

Terminologia para descrever Máquinas de Turing

- Até agora usamos as descrições formais e de implementação
- Passaremos a usar mais a descrição de alto nível
  - Objetos (O) convertidos em cadeias (<O>)
    - Ex de O: polinômio p sobre a veriável x
  - Vários objetos em uma única cadeia (<O_1, O_2, ..., O_k>)
  - Assumimos que as MTs são capazes de decodificar essas cadeias

Descrição de alto nível de Máquinas de Turing

- M = “ …

“

- Primeira linha: entrada da máquina
  - w é cadeia
  - <w> é objeto codificado em cadeia – implicitamente MT testa se a codificação está ok, se não estiver rejeita

M_1 = “A entrada é um polinômio p sobre a variável x.

1. Calcule o valor de p com x substituída sucessivamente pelos valores 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, … Se em algum ponto o valor do polinômio resulta em 0, *aceite*.”

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

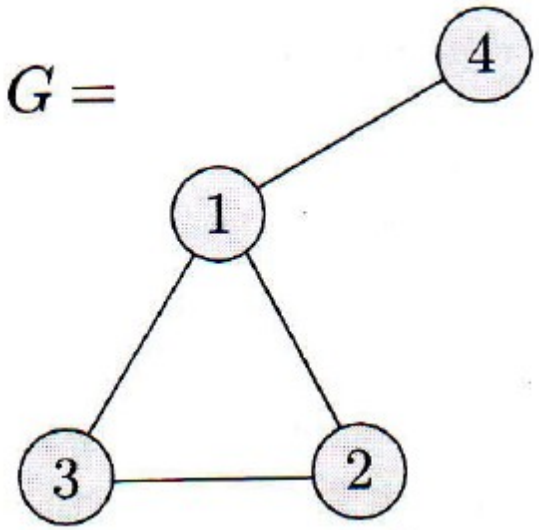
O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

M = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Codificação:
  - G = (N,E) onde N é o conjunto de nós e E é o conjunto de arestas
  - <G> = lista de nós (números decimais) e lista de arestas (pares desses números)



$\langle G \rangle =$

(1,2,3,4)((1,2),(2,3),(3,1),(1,4))

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Teste da codificação:
  - Duas listas, uma de decimais e outra de pares de decimais
  - Lista de nós não deve ter repetições
  - Lista de arestas só pode ter nós da lista de nós
- Obs.: distinção de elementos – exemplo 3.12 do livro

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

M = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Estágio 1: M marca o primeiro nó com um ponto no dígito mais à esquerda

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

M = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Estágios 2 e 3:
  - a) Varre a lista de nós procurando um nó não marcado com ponto (n_1)
    - Marca n_1 com sublinhado
  - b) Varre a lista de nós novamente procurando um nó marcado com ponto (n_2)
    - Marca n_2 com sublinhado
  - c) Varre a lista de arestas procurando uma aresta entre n_1 e n_2
    - Se acha, tira o sublinhado de n_1 e n_2 e marca n_1 com ponto e volta para o início do estágio 2
    - Senão, move o sublinhado de n_2 para outro nó marcado (chame esse de n_2) e repete o passo c)
  - d) Se acabarem os nós marcados (n_1 não está conectado a nenhum nó marcado até o momento)
    - Se ainda houver nós não marcados, move o sublinhado de n_1 para o próximo nó não marcado e repete os passos b) e c).
    - Senão vai para o estágio 4 (não conseguiu marcar nenhum nó novo)

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

M = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Estágio 4: varre a lista de nós verificando se todos estão com ponto
  - Se sim, entra em um estado de aceitação
  - senão, entra em um estado de rejeição