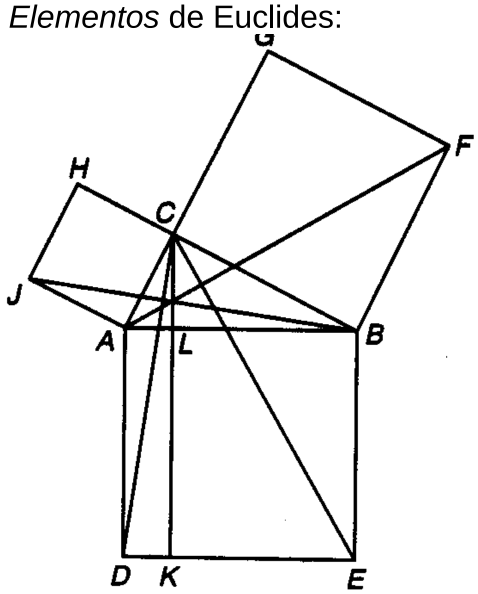
MAT1514 – A Matemática na Educação Básica – 2º semestre de 2017
TG5 - Áreas

1. A partir da fórmula da área de retângulo, usando as propriedades da área relacionadas à congruência e à reunião de figuras, deduza as fórmulas conhecidas para as áreas do paralelogramo, do triângulo, do trapézio e do losango. Destaque as propriedades utilizadas na dedução das fórmulas.

2. Provas do **Teorema de Pitágoras**, usando áreas.

   Cada um dos itens a seguir contém a figura que pode ser utilizada para dar uma prova para o Teorema de Pitágoras e uma generalização. Descreva a prova sugerida para cada um dos casos.

   a) Prova encontrada nos *Elementos* de Euclides:



Euclides usou as relações entre as áreas:

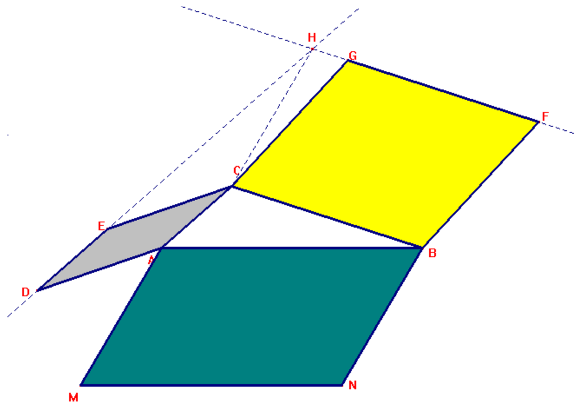
Área (ADKL)/2 = área(ΔADC) = área (ΔABJ) = área($ACJH$)/2

Área (BEKL)/2 = área(ΔBEC) = área (ΔABF) = área($BFCG$)/2

e concluiu a prova do teorema somando as áreas acima relacionadas. Justifique as passagens acima.

b) Uma das generalizações do Teorema de Pitágoras dada por Pappus:

Dado um triângulo ΔABC, considere os paralelogramos ACED e CBFG, conforme a figura abaixo. Se o ponto H é a intersecção das retas DE e GF, e o segmento os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{CH}$ são paralelos e de mesmo comprimento, então a área do paralelogramo AMNB é igual à soma das áreas dos paralelogramos ACED e CBFG.

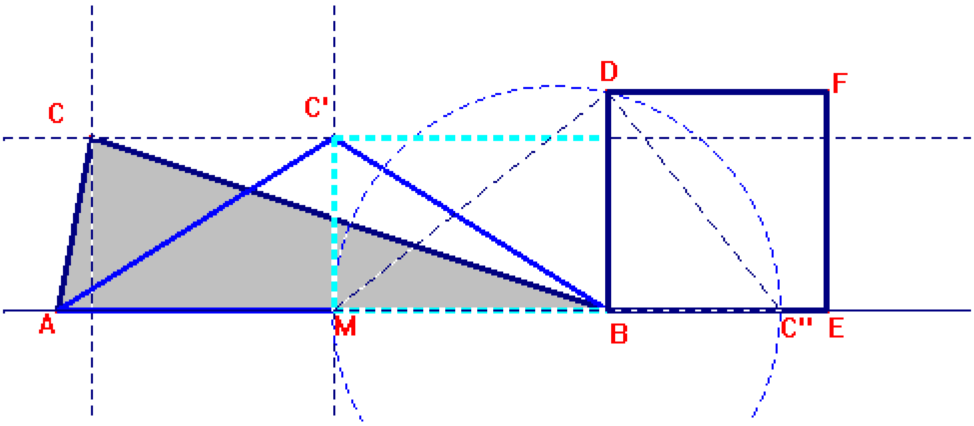


I) usando equivalência de áreas, esboce uma prova para o teorema de Pappus;
II) a partir de dois paralelogramos *ABCD* e *EFGH (escolha à vontade)*, construa um terceiro paralelogramo cuja área seja a soma das áreas dos paralelogramos escolhidos.

3. Entre os gregos, o problema da **quadratura** (encontrar um quadrado com mesma área que uma figura geométrica dada) tinha solução conhecida para polígonos quaisquer.

(I) Se começamos com um triângulo ΔABC, é fácil seguir as etapas descritas e ilustradas a seguir para construir um quadrado equivalente a ele, ou seja com a mesma área.

Questão: Verifique e justifique as construções utilizadas e as propriedades afirmadas sobre as figuras construídas.



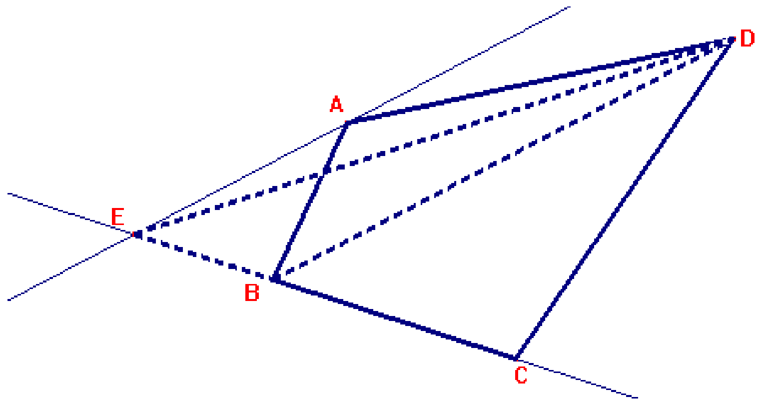
- construímos, inicialmente, o triângulo isósceles $\Delta ABC'$, com a mesma base do ΔABC mas com vértice *C'* na reta paralela à base AB que passa pelo vértice *C*;
- o triângulo isósceles tem a mesma área do retângulo cujos lados são C'M e BM ;
- construindo o triângulo retângulo $\Delta MDC''$, cuja hipotenusa tem comprimento *MB + BC''*, e *BC'' = MC'*, temos que sua altura relativa à hipotenusa terá comprimento *x* tal que:

$$x^2 = BD^2 = MB \cdot BC'' = MB \cdot MC'$$

ou ainda:

$$\textit{área do quadrado} = x^2 = \textit{área do retângulo} = \textit{área do } \Delta ABC$$

(II) Passando dos triângulos aos quadriláteros, observamos que é possível, para um quadrilátero qualquer, construir um triângulo equivalente, ou seja, de mesma área. A construção é simples, e está ilustrada na figura abaixo:



Tomando a diagonal BD, o triângulo *ΔABD* é equivalente ao triângulo *ΔBDE*, sendo *E* o ponto de intersecção da reta que contém o lado BC com a paralela à diagonal BD que passa pelo ponto *A*. Daí, o novo triângulo *ΔECD* é equivalente ao quadrilátero *ABCD (justifique)*. A partir desse triângulo, construímos, conforme o processo anterior, um quadrado equivalente ao quadrilátero *ABCD*.

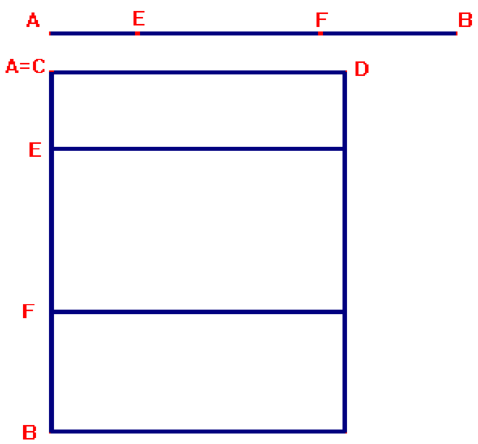
(iii) Para polígonos quaisquer, generalize o procedimento utilizado para os quadriláteros.

4. **Álgebra Geométrica: (livro II)** Euclides desenvolveu as provas das identidades algébricas através de relações entre as áreas de figuras convenientemente construídas, tratadas nos enunciados como "o retângulo contido pelas retas". As provas eram descritas detalhadamente, diz-se que esta é a "fase retórica" da Matemática.

Dadas duas retas, uma das quais se divide em um número qualquer de partes, o retângulo contido pelas duas retas é igual à soma dos retângulos contidos pela reta não dividida e cada um dos segmentos.

A álgebra geométrica de Euclides corresponde à relação:

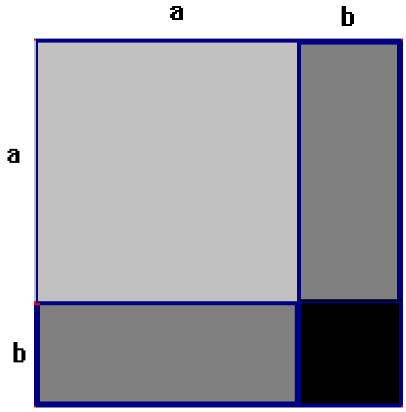
$$AB \,.\, CD = (AE + EF + FB) \,.\, CD = AE \,.\, CD + EF \,.\, CD + FB \,.\, CD$$



Ainda no livro II, a **Proposição 4** tem o seguinte enunciado: ***Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.***

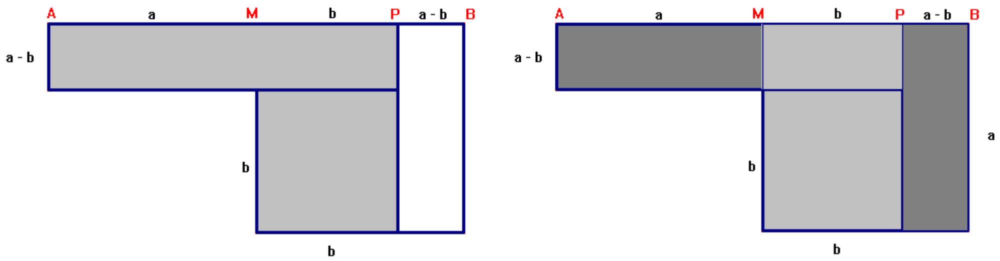
Ou seja:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



A **proposição 5** do Livro II tem o enunciado:

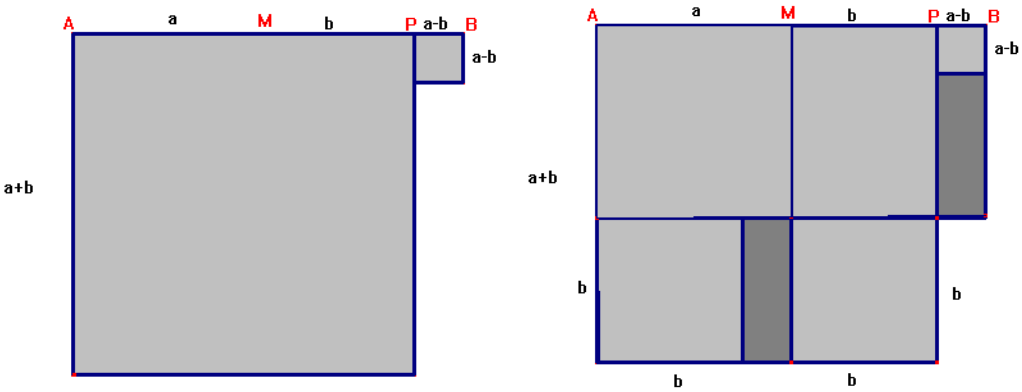
Dividindo-se uma reta em partes iguais e desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção é igual ao quadrado sobre a metade da reta



$$(a + b).(a - b) + b^2 = a^2$$

A **proposição 9** do Livro II tem o enunciado:

Se uma reta é cortada em segmentos iguais e desiguais, então a soma dos quadrados sobre os segmentos desiguais é igual ao dobro da soma do quadrado sobre as metades com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção.



$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Questão: Identifique as propriedades de área que justificam as proposições enunciadas acima, constantes do Livro II de Euclides.