# ÁREA DO RETÂNGULO
**Determinação através do Método da exaustão de Arquimedes**

## Notações e fatos básicos

- Sendo $a$ e $b$ números reais, para representar um quadrado cujos lados medem $b$ unidades de comprimento e retângulos cujos lados medem $a$ e $b$ unidades de comprimento usaremos, respectivamente, as notações $Q_b$ e $R_{a,b}$.
- No que segue assumimos que toda figura plana e limitada possui uma área cujo valor é um número real positivo e que $a(Q_1) = 1$ $u.a.$ (uma unidade de área).
- Assumiremos também as propriedades das áreas e dos números reais.

## Áreas de Retângulos

Considerando os lados de $Q_1$ subdivididos em $m$ segmentos de mesma medida, podemos então decompor o quadrado original em $m^2$ "quadradinhos"$Q_{\frac{1}{m}}$. Assim, a partir da ideia de fração de parte/todo temos $a(Q_{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m^2}$ $u.a.$.

Já o retângulo $R_{\frac{i}{m},\frac{j}{m}}$ de lados $\frac{i}{m}$ e $\frac{j}{m}$, pode ser decomposto em $ij$ quadrados de lado $1/m$, logo sua área será

$$a(R_{\frac{i}{m},\frac{j}{m}}) = ija(Q_{1/m}) = \frac{ij}{m^2}u.a. = \frac{i}{m}\frac{j}{m}\ u.a..$$

Assim, para um retângulo de lados $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, temos $\frac{p}{q} = \frac{ps}{qs}$ e $\frac{r}{s} = \frac{rq}{qs}$ e portanto terá como área $\frac{ps}{qs}\frac{rq}{qs} = \frac{p}{q}\frac{r}{s}$ $u.a.$.

Provamos assim que **se $R_{a,b}$ tem números racionais positivos como medida de seus lados, então $a(R_{a,b}) = ab$ $u.a.$.**

Usaremos agora o método da exaustão de Arquimedes para verificar que essa propriedade é também válida se os lados do retângulo tiverem medidas irracionais.

Tomemos um $R_{c,d}$ com $c$ ou $d$ número irracional. Queremos comprovar que o número real positivo $c.d$ expressa a medida da área de $R_{c,d}$. Sabemos também que não poderemos decompor esse retângulo na união de pequenos quadrados de lado racional (*por quê?*). Por isso utilizaremos a tricotomia dos reais para mostrar que o número real positivo $a(R_{c,d})$ não pode ser menor do que $cd$ e nem maior do que $cd$, tendo portanto que ser igual a $cd$.

Na argumentação da prova teremos de lançar mão de propriedades geométricas das áreas, da densidade dos racionais como subconjunto dos reais e de propriedades algébricas das operações.

Como descrito acima as etapas dessa prova serão:

1. Dado m um número real qualquer tal que $0 < m < c.d$ , então $m < a(R_{c,d})$.
2. Dado n um número real qualquer tal que $c.d < n$ , então $a(R_{c,d}) < n$.

Dessa forma, como $a(R_{c,d})$ é um número real positivo que não é nem maior e nem menor que $cd$, teremos $a(R_{c,d}) = cd$ $u.a.$ (tricotomia).

Vejamos.

1. Dado m um número real qualquer tal que $0 < m < c.d$. Não é difícil mostrar que $x = \sqrt{\frac{mc}{d}}$ e $y = \sqrt{\frac{md}{c}}$ são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} xy & = m \\ \frac{x}{c} & = \frac{y}{d} \end{cases}$$

   Mostremos que vale que $x < c$ e que $y < d$. Temos que $m < cd$ e, portanto, como $xy = m$ então

$$xy < cd.$$

   Mas também vale que $y = \frac{xd}{c}$ e que $x = \frac{yc}{d}$. Substituindo esses valores na desigualdade anterior obtemos:

$$x.\frac{xd}{c} < cd \Leftrightarrow x^2 < c^2 \Leftrightarrow x < c,$$

   já que $x$ e $c$ são positivos e também

$$y\frac{yc}{d} < cd \Leftrightarrow y^2 < d^2 \Leftrightarrow y < d,$$

   pois $y$ e $d$ são positivos.

   Pela densidade dos racionais nos reais, existem duas frações $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ (números racionais positivos), tais que:

$$x < \frac{p}{q} < c \quad \text{e} \quad y < \frac{r}{s} < d.$$

   Com esses dois números racionais podemos construir, no interior de $R_{c,d}$ um retângulo auxiliar $R_{\frac{p}{q},\frac{r}{s}}$, de lados $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ (cujo valor da área é sabido), que nos permite comprovar que $m < a(R_{c,d})$, como queríamos demonstrar.

2. Dado n um número real qualquer tal que $c.d < n$ , então $a(R_{c,d}) < n$.

   Podemos mostrar de forma análoga. (Exercício!!!)

Com isso provamos que **para $a$ e $b$ reais positivos temos $a(R_{a,b}) = ab$ u.a..**