

# RESPOSTAS FORÇADAS

$$[K] \cdot \{U(t)\} + [C] \cdot \{\dot{U}(t)\} + [M] \cdot \{\ddot{U}(t)\} = \{F(t)\}$$

## Amortecimento viscoso ou proporcional

A parcela de amortecimento surge em decorrência de dois tipo:

**Amortecimento Interno:** Ocorre no material, devido a micro defeitos, deslizamentos de cristais, etc.

**Amortecimento externo:** devido aos efeitos de contorno, contato entre diferentes corpos, como edifício e solo, impactos entre meios, etc.

## MATRIZ DE AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

Matriz formulada considerando desacoplamento entre as eq. de movimento devidos aos diferentes modos, ou seja, condição de ortogonalidade entre diferentes modos:

$$\phi_m^T \cdot m \cdot \phi_n = 0 \quad \phi_m^T \cdot k \cdot \phi_n = 0 \quad m \neq n$$

Considera-se também essa condição para a matriz de amortecimento:

$$\phi_m^T \cdot c \cdot \phi_n = 0$$

Rayleigh mostrou que essa matriz poderia ser escrita da forma:

$$[C] = a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [K] \quad \text{ou} \quad [C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K]$$

Onde os fatores  $a_0$  e  $a_1$  são determinados experimentalmente.





Os fatores  $a_1$  e  $a_0$  podem também serem calculadas em função das duas primeiras frequências naturais obtidas pela análise modal ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ), da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \begin{bmatrix} -1/\omega_2 & 1/\omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}$$

$\xi = \frac{c}{c_c}$  : razão de amortecimento

Para estruturas, é comum esses valores serem menores que 20%

SISTEMA	$\xi$
Metal (regime elástico)	< 0.01
Estrutura Metálica Contínua	0.02 a 0.04
Estrutura Metálica com Juntas	0.03 a 0.07
Alumínio / Linhas de Transmissão	0.0004
Tubulação com Pequenos Diâmetros	0.01 a 0.02
Tubulação com Grandes Diâmetros	0.02 a 0.03
Absorvedores de Choque	0.03
Borracha	0.05
Grandes Construções Durante Terremotos	0.01 a 0.05

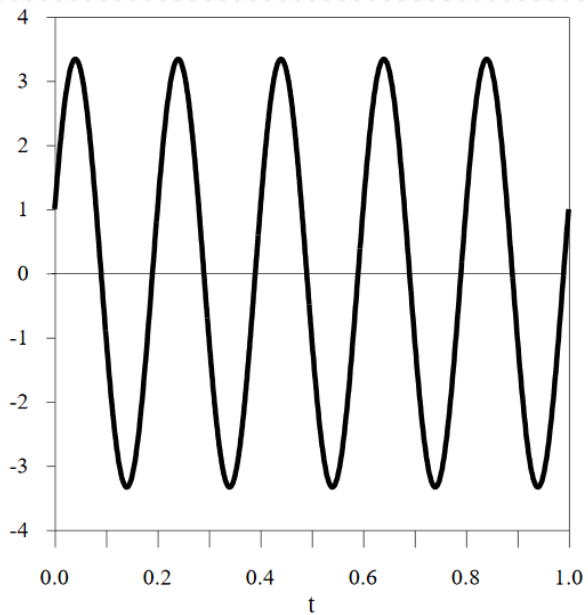
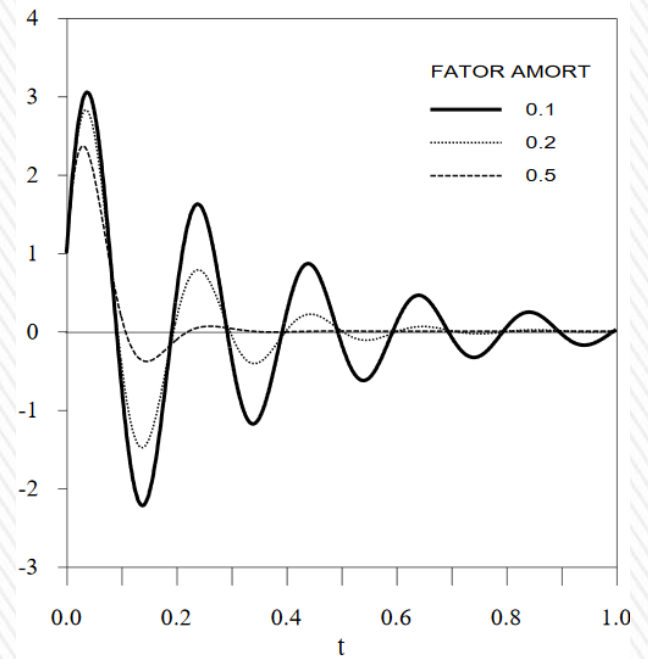


Figura 2.1 - Vibração livre de sistemas não amortecido.



a 2.2 - Vibração livre de sistemas subamortecidos.

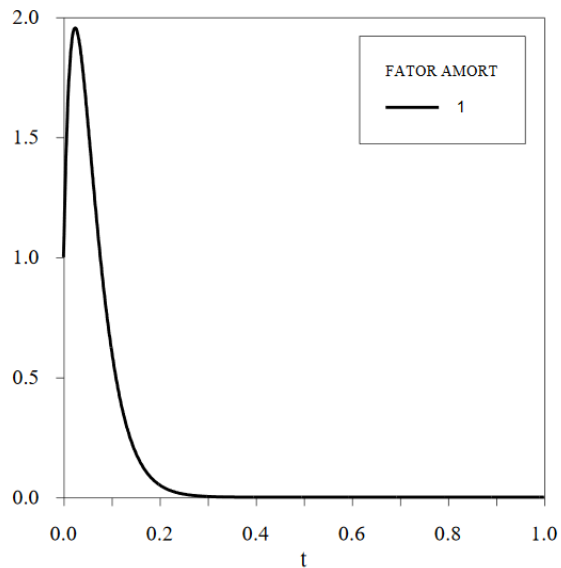


Figura 2.3 - Vibração livre de sistemas com amortecimento

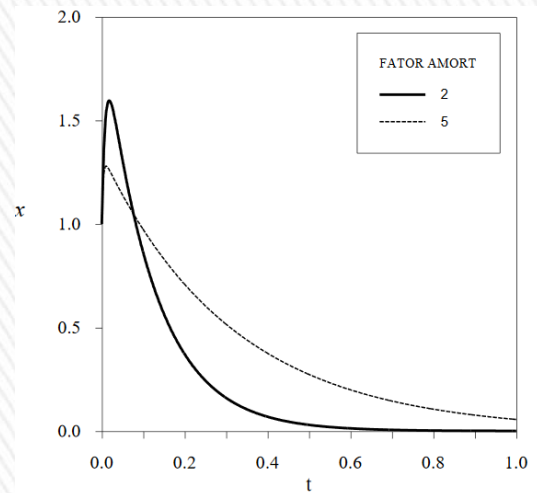


Figura 2.4 - Vibração livre de sistemas sobreamortecidos.



# RESPOSTAS FORÇADAS

$$[K] \cdot \{U(t)\} + [C] \cdot \{\dot{U}(t)\} + [M] \cdot \{\ddot{U}(t)\} = \{F(t)\}$$

Pode ser resolvida por **superposição modal** para análise linear ou usando **integração direta**, via aproximações em passos de tempo.

Inicia-se com a prescrições de condições iniciais, tais como:

$$U_0 = 0 \quad e \quad \dot{U}_0 = 0$$

# Tipos de solicitações: Determinísticos ou Aleatórios

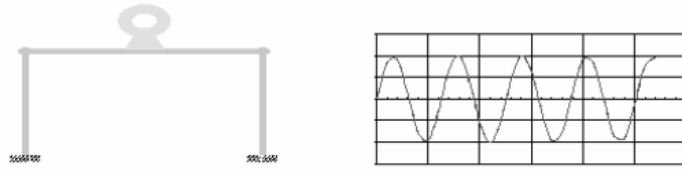


Figura 1.2: Carregamento periódico harmónico – vibração de máquina rotativa.

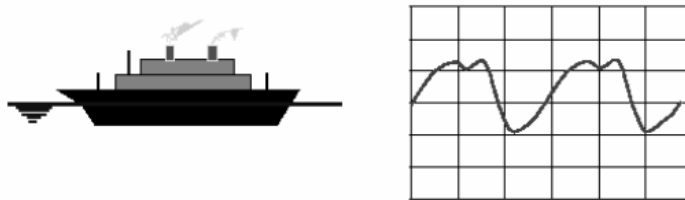


Figura 1.3: Carregamento periódico não harmónico – propulsor de navio.

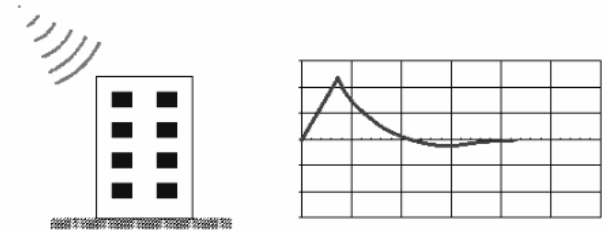


Figura 1.4: Carregamento impulsivo – onda de choque de uma explosão.

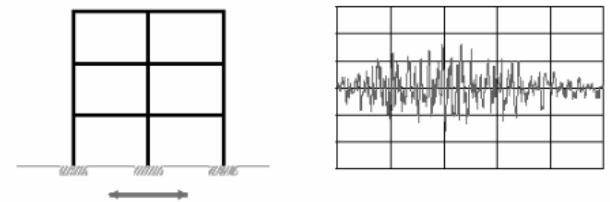


Figura 1.5: Solicitação de longa duração – acção sísmica.

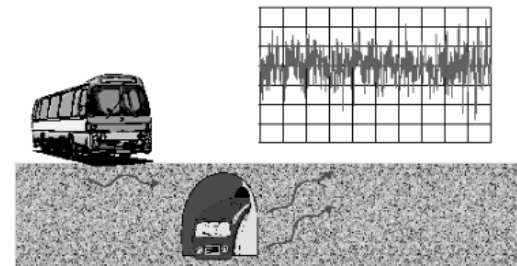


Figura 1.6: Carregamento aleatório – vibração ambiente.



# RESPOSTAS FORÇADAS

Os métodos de integração direta se classificam em:

- **Métodos Implícitos:** utiliza diferentes expressões para veloc. e acel. na eq. do mov. no tempo  $t = (n+1) \cdot \Delta t$ .
  - *Exemplos: Método de Houbolt, Método de Wilson  $\theta$ , Método de Newmark  $\beta$*
- **Métodos Explícitos:** utiliza diferentes expressões para velocidade e aceleração na eq. do mov. no tempo  $t = n \cdot \Delta t$ .
  - *Exemplo: Diferença Central*



# Introdução: Diferenças Finitas

Seja  $\Delta x > 0$ . Considere as seguintes expansões de Taylor de uma função  $u$  em torno de um ponto  $x_0$ , respectivamente à direita e à esquerda de  $x_0$ :

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \frac{du}{dx}(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x_0)\Delta x^3 + \dots$$

e

$$u(x_0 - \Delta x) = u(x_0) - \frac{du}{dx}(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x_0)\Delta x^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x_0)\Delta x^3 + \dots$$

onde escolhemos denotar  $\Delta x^n = (\Delta x)^n$ . Isolando a derivada primeira nestas expressões, respectivamente, temos:

$$\frac{du}{dx}(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} - \frac{1}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x_0)\Delta x - \frac{1}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x_0)\Delta x^2 - \dots \quad (1)$$

e

$$\frac{du}{dx}(x_0) = \frac{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{1}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x_0)\Delta x - \frac{1}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x_0)\Delta x^2 + \dots \quad (2)$$

Imediatamente obtemos duas aproximações possíveis para a primeira derivada de  $u$  em  $x_0$ :

$$\frac{du}{dx}(x_0) \approx \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

e

$$\frac{du}{dx}(x_0) \approx \frac{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

A primeira é chamada **diferença finita progressiva** e a segunda é chamada **diferença finita regressiva**.



## Método Explícito

A derivada parcial  $u_t$  pode ser aproximada usando a **diferença avançada**, ou seja,

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + \Delta t) - u(x_i, t_j)}{\Delta t},$$

com erro local  $\mathcal{O}(\Delta t)$ .

---

Substituindo  $u(x_i, t_j)$  por sua aproximação em  $u_{ij}$ , encontramos:

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta t}.$$

Reorganizando os termos, encontramos:

$$u_{i,j+1} = \alpha u_{i-1,j} + (1 - 2\alpha)u_{i,j} + \alpha u_{i+1,j},$$

em que

$$\alpha = \frac{\Delta t}{h^2}.$$

**Número de Courant**



## Método Explícito

Lembre-se que as aproximações para as derivadas tem erro local  $\mathcal{O}(h^2)$  e  $\mathcal{O}(\Delta t)$ .

Esse fato, porém, não garante que  $u_{ij}$  é uma boa aproximação para a solução exata  $u(x_i, t_j)$ .

Com efeito, pode-se mostrar que uma boa aproximação pode ser obtida somente se

$$\alpha = \frac{\Delta t}{h^2} < \frac{1}{2}.$$

**Número de Courant**

Essa inequação é uma restrição severa para a utilização do método explícito.

Por exemplo, se  $h = 0.01$ , deveremos ter  $\Delta t < 1/20.000$ .

**Mostra-se que esse método é condicionalmente estável.**



# Método Explícito: *Diferença Central*

Usando diferenças finitas centradas, a velocidade e aceleração podem ser aproximadas por:

$$\dot{U}_n = \frac{1}{2\Delta t} \cdot [U_{n+1} - U_{n-1}] \quad (1) \qquad \ddot{U}_n = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot [U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}] \quad (2)$$

Onde os sub-índices  $(n-1)$ ,  $n$  e  $(n+1)$  são os passos de tempo em  $(n-1)\Delta t$ ,  $(n)\Delta t$  e  $(n+1)\Delta t$ , com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

O deslocamento em  $(n+1)\Delta t$  é obtido substituindo os valores no tempo  $(n)\Delta t$  em (1) e (2), na equação do movimento:

$$[K] \cdot U_n + [C] \cdot \dot{U}_n + [M] \cdot \ddot{U}_n = \bar{F}_n \quad (3)$$

Assim, chega-se a:

$$[K] \cdot U_n + [C] \cdot \left\{ \frac{1}{2\Delta t} \cdot [U_{n+1} - U_{n-1}] \right\} + [M] \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} \cdot [U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}] \right\} = \bar{F}_n \quad (4)$$

Que pode ser organizada como:

$$\left[ K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right] \cdot U_n + \left[ \frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} \right] \cdot U_{n+1} + \left[ \frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] \cdot U_{n-1} = \bar{F}_n \quad (5)$$

# Método Explícito: *Diferença Central*

E o deslocamento no tempo  $(n+1)\Delta t$  é obtido isolando-o em (5), como:

$$\left[\frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2}\right] \cdot U_{n+1} = \bar{F}_n - \left[K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right] \cdot U_n - \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t}\right] \cdot U_{n-1}$$

Ou de maneira sintética:

$$[\hat{K}] \cdot U_{n+1} = \hat{F}_{n+1} \quad (6)$$

$$\text{Com: } [\hat{K}] = \left[\frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2}\right] \quad \hat{F}_{n+1} = \bar{F}_n - \left[K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right] \cdot U_n - \left[\frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t}\right] \cdot U_{n-1}$$

Resolve-se, para cada passo de tempo, o sistema linear (6), contendo o seu deslocamento. Entretanto, para o 1º. passo, para se obter  $U_1$ , com  $n = 0$ , tem-se que conhecer os deslocamentos  $U_{-1}$  e  $U_0$ . Esse último, assim, como  $\dot{U}_0$ , são prescritos, e de modo geral são nulos. A estratégia para se determinar  $U_{-1}$  é isolá-lo em (2), ou seja:

$$\ddot{U}_n = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot [U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}] \rightarrow U_{n-1} = \ddot{U}_n \cdot \Delta t^2 + 2U_n - U_{n+1} \quad (7)$$

E finalmente,  $U_{n+1}$  é isolado em (1) e substituído em (7), e tomando  $n = 0$ , chega-se a:

$$U_{-1} = U_0 - \dot{U}_0 \cdot \Delta t + 0,5 \cdot \ddot{U}_0 \cdot \Delta t^2 \quad (8)$$

Onde então, basta apenas conhecer ou determinar a aceleração inicial,  $\ddot{U}_0$ , a qual pode ser obtida resolvendo a eq. de movimento, eq. 3, uma vez que se conhece  $U_0$  e  $\dot{U}_0$ .



# Método Explícito: *Diferença Central*

O fluxograma do Método da Diferença Central para resolver a equação de movimento (3) é dado por:

1. Calcule as freq. naturais ( $\omega$ ). Defina  $\Delta t \leq \frac{2}{\max(\omega)}$

2. Defina:  $K, M, C, F(t), t_{\text{final}}, U_0, \dot{U}_0$  e calcule:  $\ddot{U}_0$  e  $U_{-1}$

3. Calcule uma única vez:

$$[\hat{K}] = [R2] = \left[ \frac{C}{2\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} \right], [R3] = \left[ \frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] \text{ e } [R4] = \left[ K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right]$$

4.  $t_i = 0, n = 0$

5. Enquanto  $t_i \leq t_{\text{final}}$  faça:

a.  $\hat{F}_{n+1} = \bar{F}(t_i)_n - [R4] \cdot U_n - [R3] \cdot U_{n-1}$

b. Resolva sistema linear:  $[R2] \cdot U_{n+1} = \hat{F}_{n+1}$

c.  $n = n + 1; t_i = t_i + \Delta t$

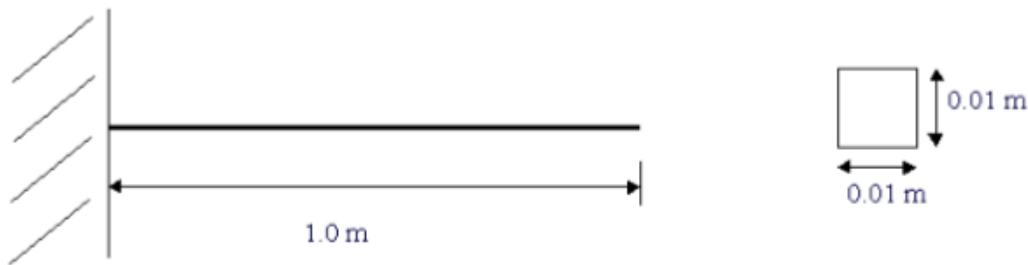
6. Fim enquanto

# Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

## Transient Analysis of a Cantilever Beam

### Introduction

This tutorial was created using ANSYS 7.0 The purpose of this tutorial is to show the steps involved to perform a simple transient analysis.



Modulus of Elasticity (E) =  $206800(10^6)$  N/m<sup>2</sup>

Density = 7830 kg/m<sup>3</sup>

Transient dynamic analysis is a technique used to determine the dynamic response of a structure under a time-varying load.

The time frame for this type of analysis is such that inertia or damping effects of the structure are considered to be important. Cases where such effects play a major role are under **step** or **impulse** loading conditions, for example, where there is a sharp load change in a fraction of time.

If inertia effects are negligible for the loading conditions being considered, a static analysis may be used instead.

For our case, we will impact the end of the beam with an impulse force and view the response at the location of impact.

Sem amortecimento

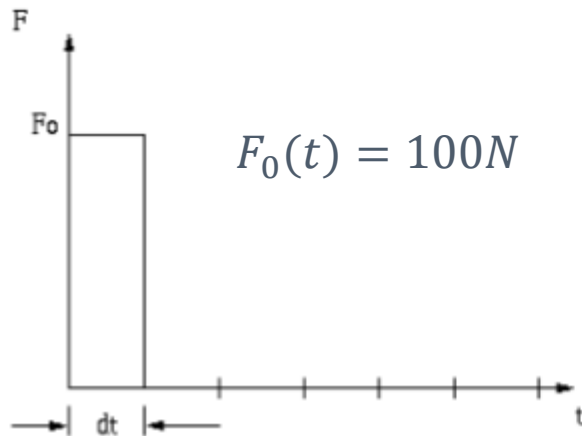
$$[C] = [0]$$



# Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento



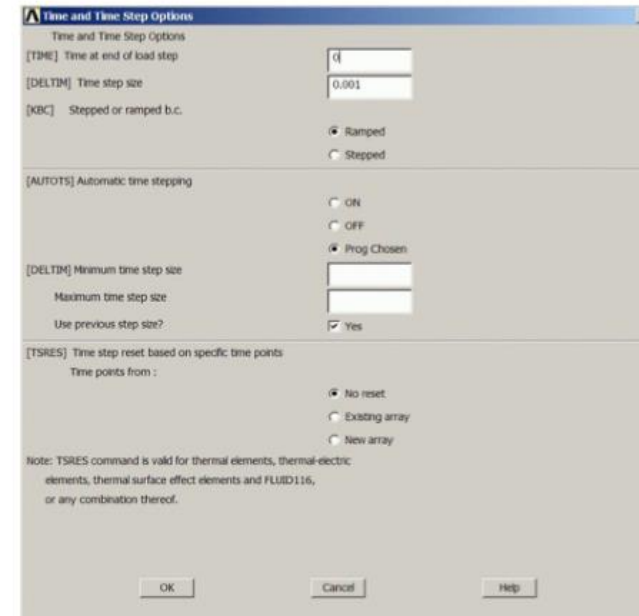
Since an ideal impulse force excites all modes of a structure, the response of the beam should contain all mode frequencies. However, we cannot produce an ideal impulse force numerically. We have to apply a load over a discrete amount of time  $dt$ .



$$dt = 0,001 \text{ seg.}$$

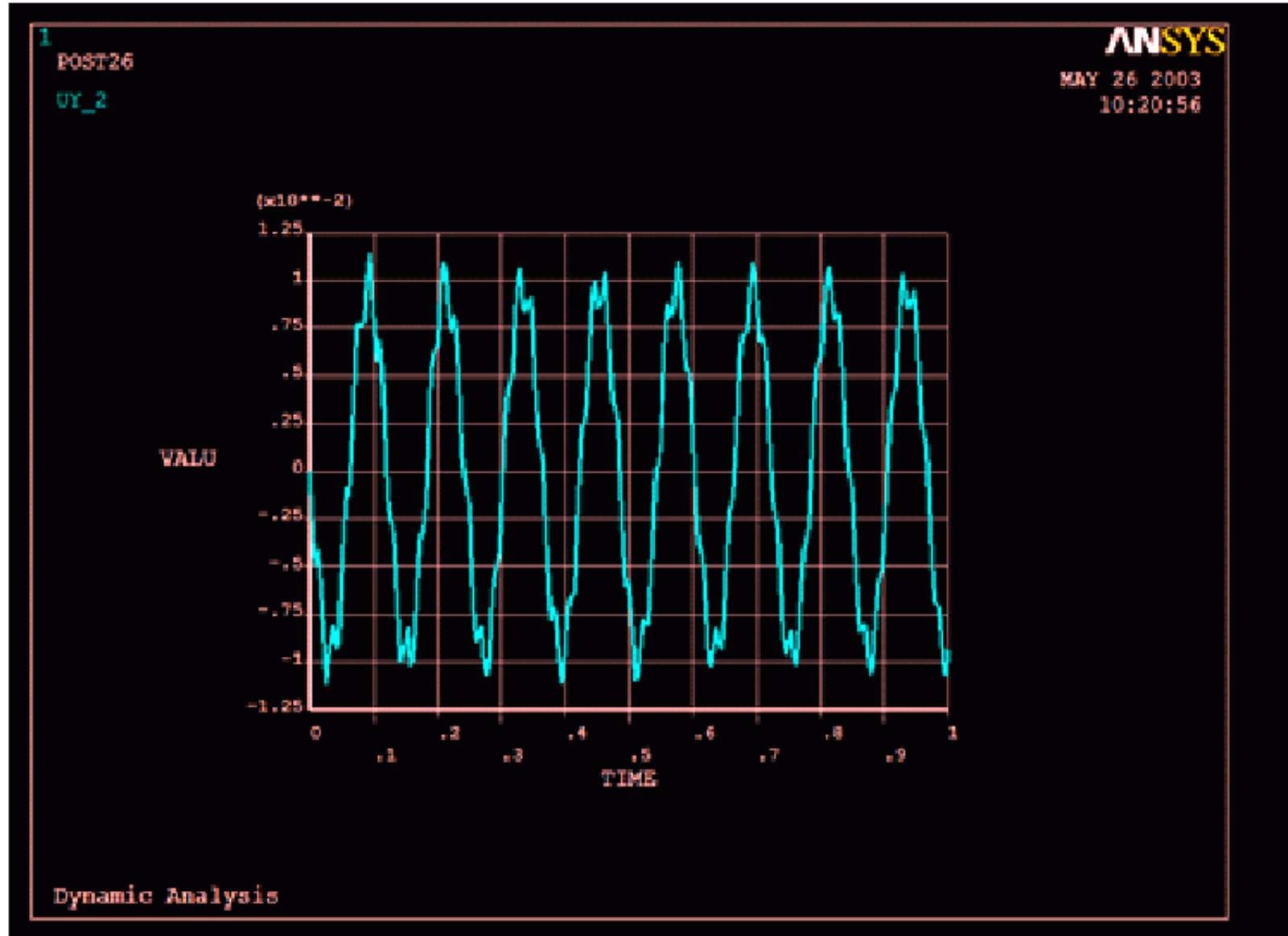
ii. Specify Time and Time Step Options

- Select **Solution > Load Step Opts > Time/Frequenc > Time - Time S**
  - set a time of 0 for the end of the load step (as shown below).
  - set [DELTIM] to 0.001. This will specify a time step size of 0.001 seconds to be used for this load step.



# Respostas para desloc. vertical do ponto extremo da viga

The following graph should be plotted in the main ANSYS window.





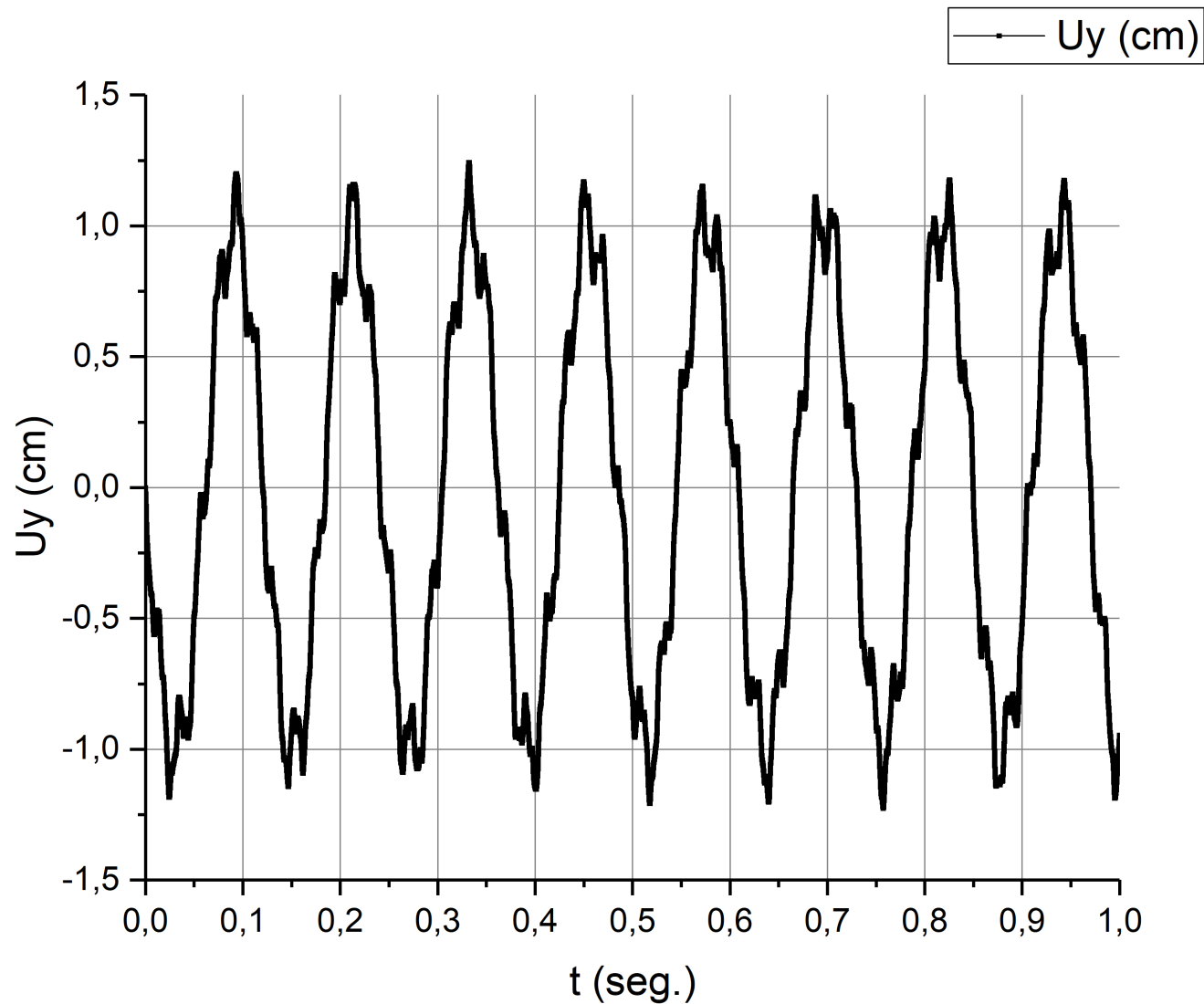
# Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

## Programa desenvolvido por Diferenças Centradas

```
Viga em balanço, exemplo do tutorial do Ansys.
NNOS
11
NÓ X Y
1 0 0
2 0.1 0
3 0.2 0
4 0.3 0
5 0.4 0
6 0.5 0
7 0.6 0
8 0.7 0
9 0.8 0
10 0.9 0
11 1.0 0
NÚMERO DE EL.
10
EL. NO_INICI NO_FINAL S E Iz COEF.DILAT TS TI H Massa especifica (massa/l3) MatrizConsistente(=1), Lumped(=0)
1 1 2 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
2 2 3 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
3 3 4 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
4 4 5 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
5 5 6 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
6 6 7 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
7 7 8 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
8 8 9 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
9 9 10 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
10 10 11 1e-4 2.068e11 8.3333e-10 1E-5 0 0 0.1 7830 0
NÓS CARREG.
1
NO FX FY M
1 0. 0 0
NÚMERO DE EL. CARREG.
1
EL PX PY
1 0.0 0.0
NÚMERO DE NÓS VINC.
1
NÓ RESTX RESTY RESTZ
1 1 1 1
NÚMERO DE APOIOS ELÁSTICOS
1
NÓ MOLA(X) MOLA(Y) MOLA(Z)
1 0 0 0
N_ROTULAS
0
NOS ROTULADOS (SE NAO TEM -1)
-1
N_NOS_COM_RECALQUE_APOIO
1
NO RECX RECY RECZ
1 0 0 0
```

# Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

## Programa desenvolvido por Diferenças Centradas

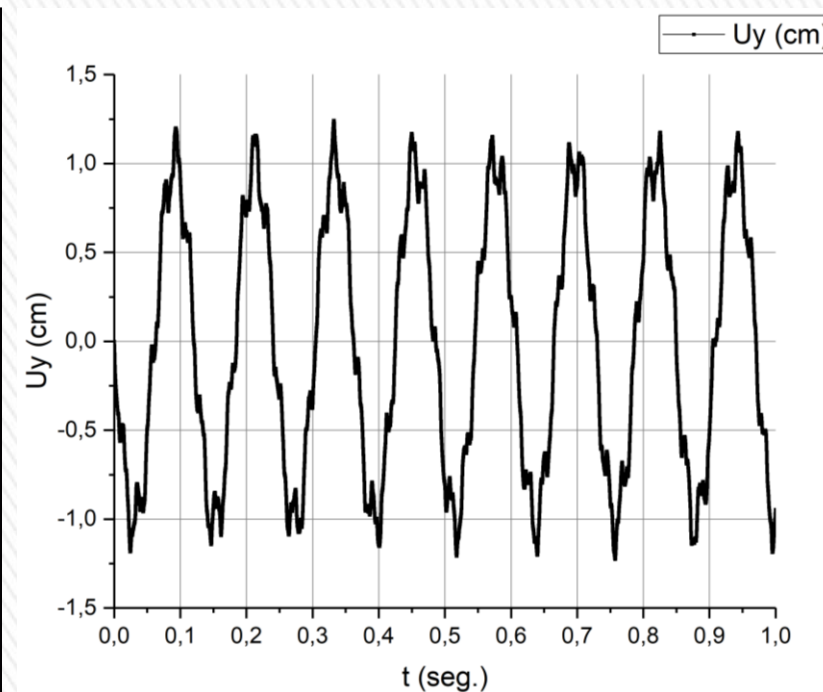
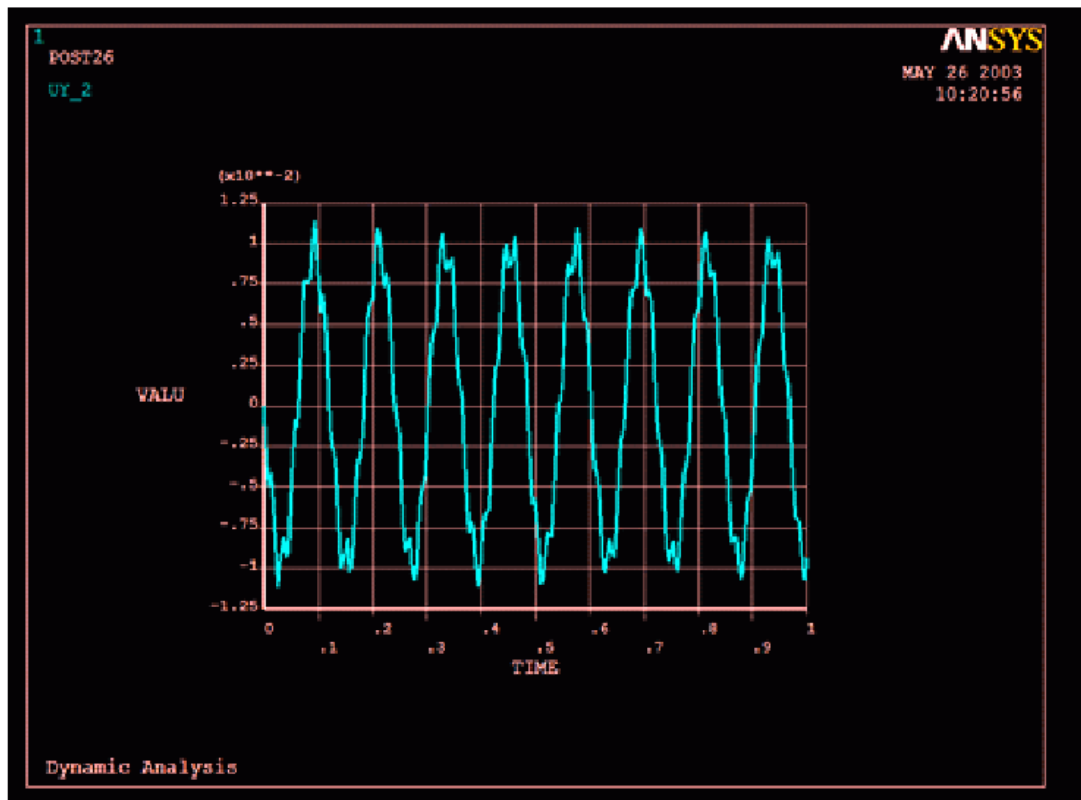


# Viga em balanço com Força de Impulso sem amortecimento

## Programa desenvolvido por Diferenças Centradas

### Ansys x Meu Programinha (Diferença Central)

The following graph should be plotted in the main ANSYS window.





# Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

## Damped Response of the Cantilever Beam

We did not specify damping in our transient analysis of the beam. We specify damping at the same time we specify our time & time steps for each load step.

We will now re-run our transient analysis, but now we will consider damping. Here is where the use of load step files comes in handy. We can easily change a few values in these files and re-run our whole solution from these load case files.

- Open up the first load step file (Dynamic.s01) for editing Utility Menu > File > List > Other > **Dynamic.s01**. The file should look like the following..

```
/COM,ANSYS RELEASE 5.7.1 UP20010418 14:44:02 08/20/2001
/NOPR
/TITLE, Dynamic Analysis
_LSNUM= 1
```

Copyright 2003 - University of Alberta

<http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/IT/Transient/Transient.html>

```
ANTYPE, 4
TRNOPT,REDU,,DAMP
BFUNIF,TEMP,_TINY
DELTIM, 1.0000000000E-03
TIME, 0.00000000
TREF, 0.00000000
ALPHAD, 0.00000000
BETAD, 0.00000000
DMPRAT, 0.00000000
TINTP,RS.0, 5.0000000000E-03,,,
TINTP,RS.0, -1.00000000, 0.50000000, -1.00000000
NCCNV, 1, 0.00000000, 0, 0.00000000, 0.00000000
ERESX,DEFA
ACEL, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
OMEGA, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000, 0
DOMEGA, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
CGLOC, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
CGOMEGA, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000
DCGOMG, 0.00000000, 0.00000000, 0.00000000

D, 1,UX, 0.00000000, 0.00000000
D, 1,UY, 0.00000000, 0.00000000
D, 1,ROTZ, 0.00000000, 0.00000000
/GOPR
```

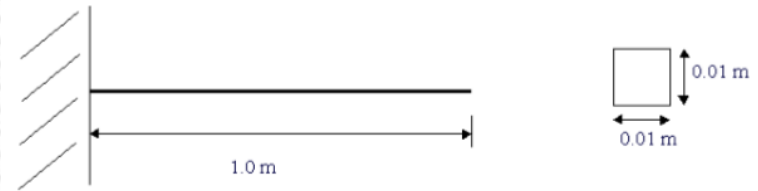
- Change the damping value **BETAD** from 0 to 0.01 in all three load step files.

$$[C] = 0,01 \cdot [K]$$

## Transient Analysis of a Cantilever Beam

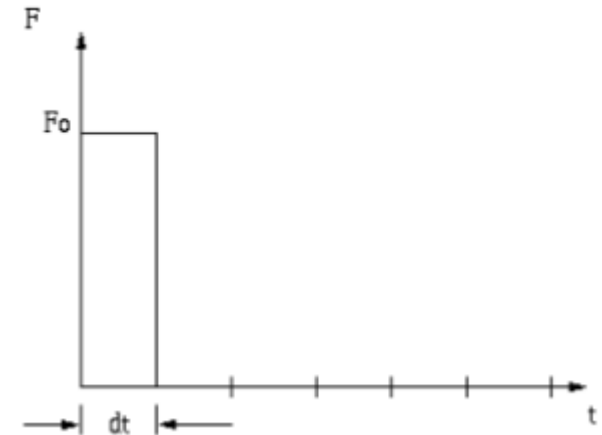
### Introduction

This tutorial was created using ANSYS 7.0 The purpose of this tutorial is to show the steps involved to perform a simple transient analysis.



Modulus of Elasticity (E) = 206800(10<sup>6</sup>) N/m<sup>2</sup>

Density = 7830 kg/m<sup>3</sup>

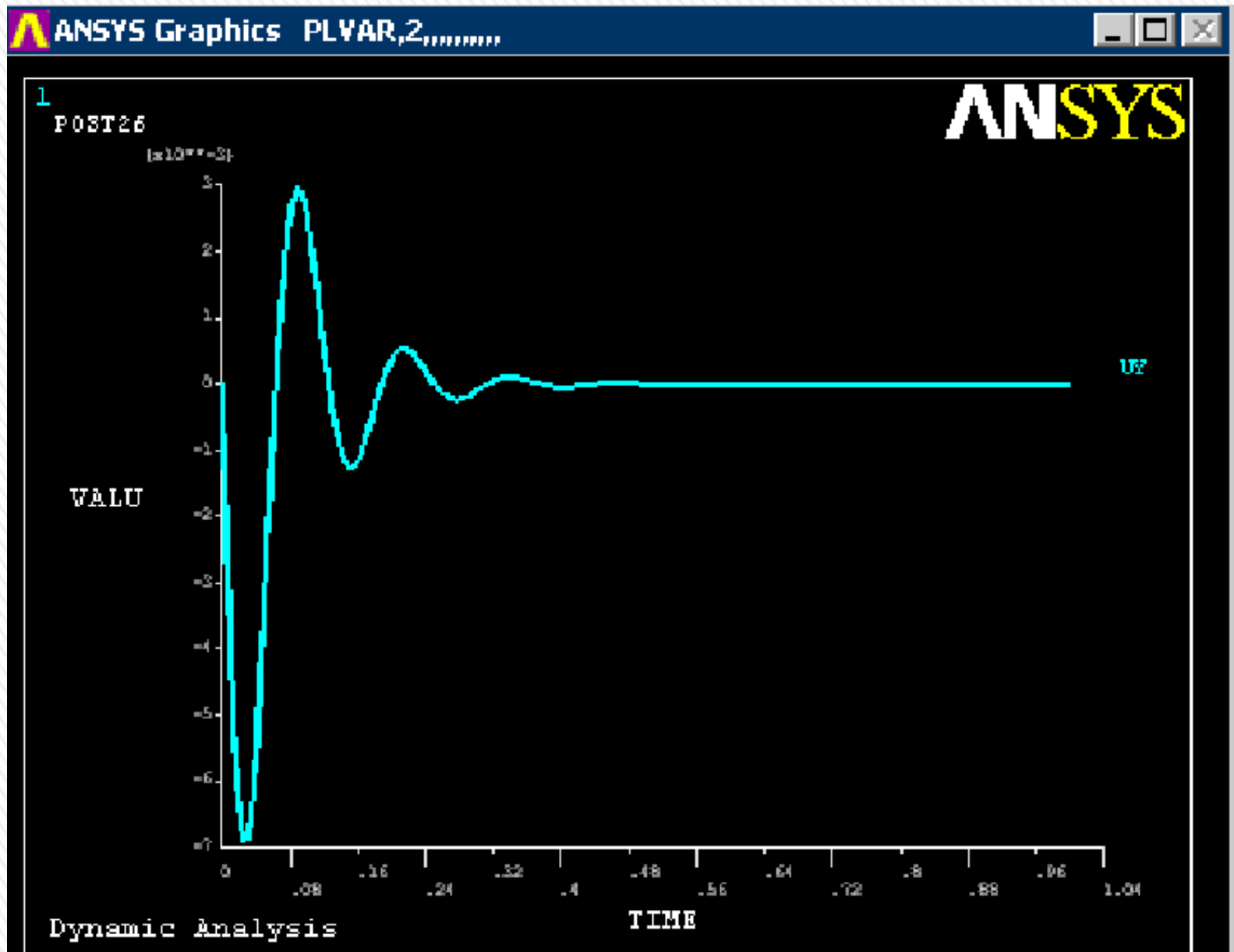


20

$$dt = 0,001$$

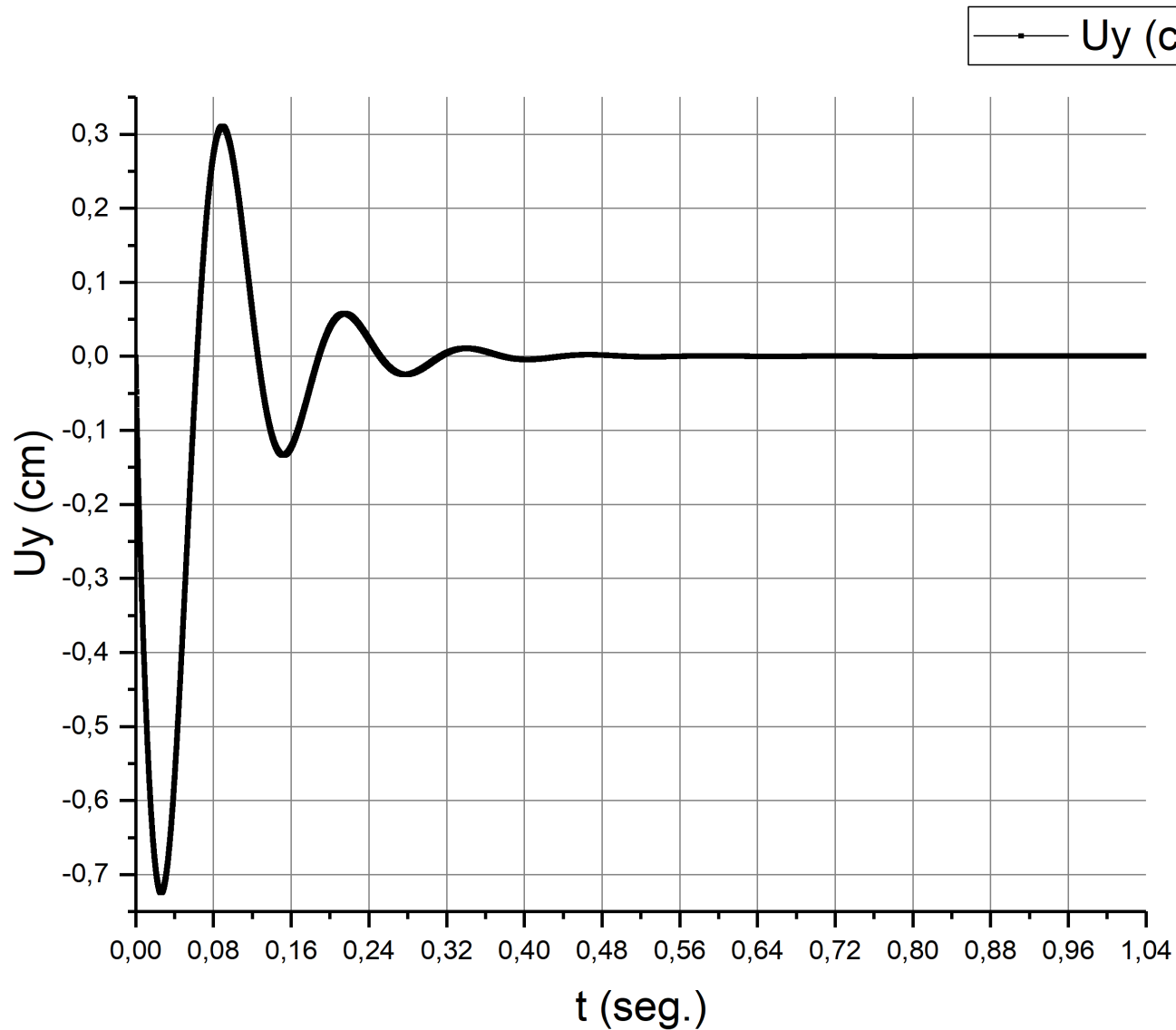
# Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

Respostas para desloc. vertical do ponto extremo da viga



# Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

Respostas para desloc. vertical do ponto extremo da viga





# Viga em balanço com Força de Impulso com amortecimento

## Anslys x Meu Programinha (Diferença Central)

