

Notas de Aula*

Prof. Helio Mitio Morishita

* Este texto é um mero roteiro de estudo e não substitui as referências bibliográficas indicadas para a disciplina.

12 ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

12.1 INTRODUÇÃO

A metodologia do método das frequências é estudar a dinâmica do sistema admitindo que o sinal de entrada é um sinal harmônico. Obviamente, os sinais reais não são harmônicos, mas estes podem ser analisados como uma composição de senos e cossenos utilizando-se a transformada de Fourier.

Considere uma função de transferência $G(s)$ sendo excitado por uma função senoidal dada por:

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t) \quad 12.1$$

A resposta no domínio de Laplace é dada, portanto, por:

$$Y(s) = G(s) \frac{X_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \quad 12.2$$

Para calcular a resposta no domínio do tempo pode-se efetuar a expansão de 12.2 em série de frações parciais. Admitindo-se que $G(s)$ tenha somente pólos simples tem-se:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - j\omega} + \frac{A_2}{s + j\omega} + \frac{B_1}{s + s_1} + \dots + \frac{B_n}{s + s_n} \quad 12.3$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa em 12.3 tem-se:

$$y(t) = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} + B_1 e^{-s_1 t} + \dots + B_n e^{-s_n t}$$

Se todos os pólos da função de transferência $G(s)$ tiverem partes reais negativas, todos os componentes da resposta relacionados com os pólos do sistema devem tender a zero para $t \rightarrow \infty$. Desta forma, em regime permanente, a resposta remanescente é:

$$y_{ss}(t) = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} \quad 12.4$$

Os coeficientes A_1 e A_2 são dados por:

$$A_1 = \frac{X_0}{2j} G(j\omega) = \frac{X_0}{2j} |G(j\omega)| e^{j\phi} \quad 12.5a$$

$$A_2 = \frac{X_0}{2j} G(-j\omega) = \frac{X_0}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\phi} \quad 12.5b$$

onde $\phi = \angle G(j\omega)$

Substituindo as equações 12.5 em 12.4 obtém-se:

$$y(t) = X_0 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad 12.6$$

A equação 12.6 mostra que um sistema linear e invariante com o tempo excitado por uma função senoidal apresenta, em regime permanente, uma resposta também senoidal com as seguintes características:

- a) mesma frequência do sinal de entrada;
- b) amplitude igual a $X_0 |G(j\omega)|$;
- c) defasagem dada por $\phi = \angle G(j\omega)$.

Portanto, para avaliar a resposta do sistema basta analisar a função $G(j\omega)$. Ou seja, a resposta do sistema só é afetada pelas características do sistema a ser controlado.

Para facilitar a análise da influência da função $G(j\omega)$ na resposta do sistema, normalmente, é utilizado ou o diagrama de Bode ou de Nyquist. No caso do diagrama de Bode a função complexa $G(j\omega)$ é desenhado em dois gráficos que são:

- a) $M = 20 \log(|G(j\omega)|)$ vs ω (decibéis)
- b) $\angle G(j\omega)$ vs ω

No caso do diagrama de Nyquist é desenhado o gráfico $\text{Im}[G(j\omega)]$ vs $\text{Re}[G(j\omega)]$

12.2 DIAGRAMAS DE BODE

O diagrama de Bode pode ser desenhado para a função de transferência de malha aberta e para a função de transferência de malha fechada. Normalmente, no projeto de controle utilizando o diagrama de Bode, dá-se preferência ao gráfico da função de transferência em malha aberta porque a sua elaboração consiste na soma dos fatores (para o módulo e fase) que compõem $G(j\omega)$. A idéia é especificar determinados parâmetros no diagrama de Bode da função de transferência de malha aberta para obter o desempenho satisfatório do sistema de controle em malha fechada.

Em geral a função de transferência de malha aberta é constituída de termos básicos e a elaboração do seu diagrama de Bode é relativamente simples, pois basta somar tanto o módulo como a fase destes termos básicos. Os principais termos que aparecem em uma função de transferência são:

- a) ganho;
- b) termo integral (1/s) e derivativo (s);
- c) fator de primeira ordem $(Ts + 1)^{\mp 1}$;
- d) fator de segunda ordem: $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$.

A seguir são mostrados os diagramas de Bode para cada um destes fatores.

12.2.1 Ganho

$$G(s) = K$$

$$M = 20\log K$$

$$\phi = 0^\circ$$

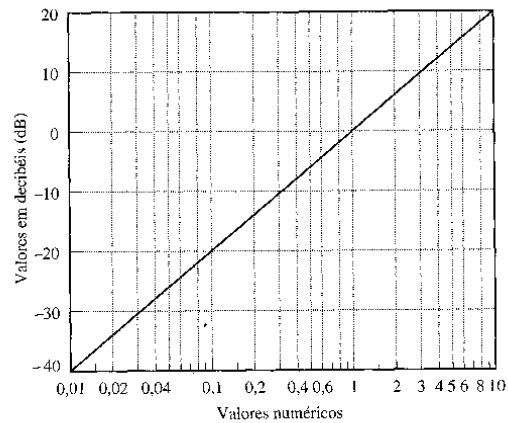


Fig. 8-3 Reta de conversão de valores numéricos em decibéis.

Fig. 12.1 Valores de ganho em decibéis

12.2.2 Fatores Integral e Derivativo

a) $G(s) = \frac{1}{s}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$M = -20\log \omega$$

$$\phi = -90^\circ$$

b) $G(s) = s$

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$M = 20\log \omega$$

$$\phi = 90^\circ$$

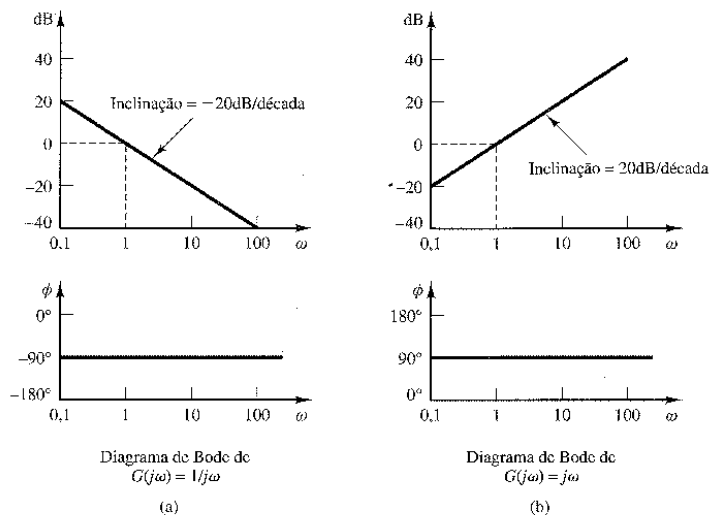


Fig. 8-4 (a) Diagramas de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$, (b) Diagramas de Bode de $G(j\omega) = j\omega$.

Fig. 12.2 Diagrama de Bode para fatores integral (a) e derivativo (b)

12.2.3 Fator de primeira ordem

$$a) G(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T} \quad 12.17$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$$

$$M = -20 \log \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

$$\phi = -\tan^{-1}(T\omega)$$

para $\omega \ll 1/T$ tem-se $|G(j\omega)| \approx 1 \Rightarrow M = 0$

para $\omega \gg 1/T$ tem-se $|G(j\omega)| \approx \frac{1}{T\omega} \Rightarrow M = -20 \log(T\omega)$

Portanto, para baixas frequências o módulo pode ser aproximado por uma reta de inclinação nula e para altas frequências por uma reta com inclinação de -20dB/década . A frequência de encontro das duas retas é $1/T$. Convém ressaltar que sistemas que tem a função de transferência definida por 12.17 “corta” a amplitude para frequências altas. Desta forma ele é conhecido como filtro de primeira ordem ou filtro passa baixa.

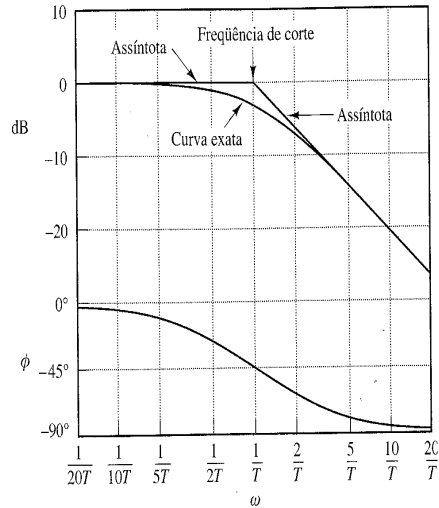


Fig. 8-5 Curvas de módulo em dB com assíntotas e de ângulo de fase relativas a $1/(1 + j\omega T)$.

Fig. 12.3 Diagrama de Bode para função de primeira ordem

b) $G(s) = Ts + 1$

$$M = 20 \log(\sqrt{(T\omega)^2 + 1})$$

$$\phi = \tan^{-1}(T\omega)$$

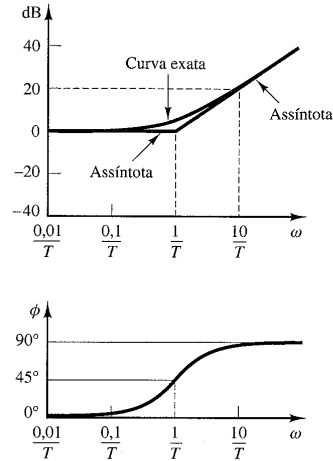


Fig. 8-7 Curvas de módulo em dB com assíntotas e de ângulo de fase relativas a $1 + j\omega T$

Fig. 12.3 Diagrama de Bode para fator $Ts + 1$

12.2.4 Fator de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

12.18

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_n\omega} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad 12.19$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

para $\omega \ll \omega_n$ tem-se

$$|G(j\omega)| \approx 1 \Rightarrow M = 0$$

$$\phi \approx -\tan^{-1} \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right) \approx 0$$

para $\omega \gg \omega_n$ tem-se

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \Rightarrow M = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{1}{-\frac{\omega}{\omega_n}} \right) = -180^\circ$$

Portanto, para frequências baixas ou altas, em relação a frequência natural o módulo pode ser aproximado por retas de inclinação nula e -40db/década , respectivamente. Para frequências próximas à frequência natural o módulo depende do amortecimento, conforme é mostrado na Fig. 12.4. A fase para frequências baixas tende para 0° e para frequências altas tende para -180° .

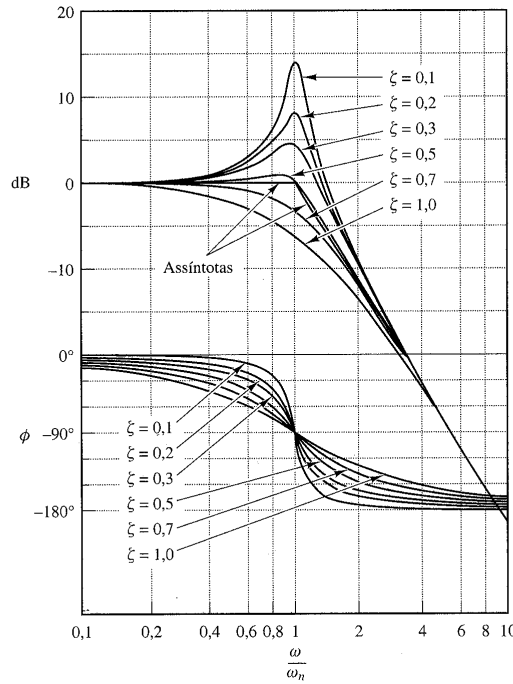


Fig. 8-8 Curvas de módulo em dB com assíntotas e de ângulo de fase relativas à função de transferência quadrática dada por (8-1).

Fig. 12.4 Diagrama de Bode de um fator de segunda ordem

A Fig. 12.4 mostra que:

- para frequências baixas em relação à frequência natural M e a fase tende para zero;
- para frequências altas em relação à frequência natural M pode ser aproximado por uma reta de decaimento -40db/década , independente do fator de amortecimento, e a fase tende para -180° .
- para frequências próximas à frequência natural o módulo da função de transferência em decibéis exibe um pico que depende do fator de amortecimento; quanto menor o amortecimento maior o pico;
- para $0 < \omega < \omega_n$ o atraso é maior quanto maior for o fator de amortecimento; já para $\omega > \omega_n$ o atraso é maior quanto menor o fator de amortecimento; e, para $\omega = \omega_n$ a fase é igual a -90° independente do fator de amortecimento.

Frequência de ressonância e pico de ressonância

O pico que ocorre na Fig. 12.4 é denominado de pico de ressonância. Para obter o seu valor pode-se calcular o valor mínimo de $g(\omega)$ que é o radicando do denominador da equação 12.17, isto é,

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

e o seu valor mínimo pode ser obtido por:

$$\frac{dg(\omega)}{d\omega} = -2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)2\frac{\omega}{\omega_n} + 2\left(4\xi^2 \frac{\omega}{\omega_n}\right) = 0 \quad 12.20$$

A solução da equação 12.20 ocorre para:

$$\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{para } \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A frequência ω_r é denominada de frequência de ressonância e ela só é definida para $0 < \zeta < 0,707$. O valor de pico que ocorre na frequência de ressonância é dada por:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{para } \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

12.3 Retardo de Transporte (Ver teorema de Translação no Tempo)

Considere a seguinte função de transferência

$$G(s) = e^{-Ts}$$

Portanto tem-se:

$$G(j\omega) = e^{-Tj\omega}$$

Portanto, o módulo e a fase são dados por:

$$|G(j\omega)| = |\cos(\omega) - j\sin(\omega)| = 1 \Rightarrow M = 0$$

$$\angle G(j\omega) = -\omega T$$

12.3 SISTEMAS DE FASE MÍNIMA E SISTEMAS DE FASE NÃO MÍNIMA

Funções de transferência de *fase mínima* são aquelas que não tem pólos ou zeros no semiplano direito do plano s , enquanto que funções de transferência de fase não mínima são aqueles que tem ou zeros e/ou pólos no semiplano direito do plano s . Sistemas com funções de transferência de fase mínima e de fase não mínima são denominados, respectivamente, de sistemas de fase mínima e não mínima.

Considere as seguintes funções:

$$G_1(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{-T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

$$G_3(s) = \frac{T_1 s - 1}{T_2 s + 1}$$

Nas Figs. 12.5 a 12.7 estão mostrados os diagramas de Bode das três funções. Os módulos de $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$ e $G_3(j\omega)$ são idênticos mas as fases são completamente distintas. A função $G_1(j\omega)$ é denominada de fase mínima porque a sua variação de fase é menor do que de outras funções de transferência com o mesmo diagrama de módulo, conforme pode ser visto comparando-se os diagramas de fase da Figs. 12.5 a 12.7.

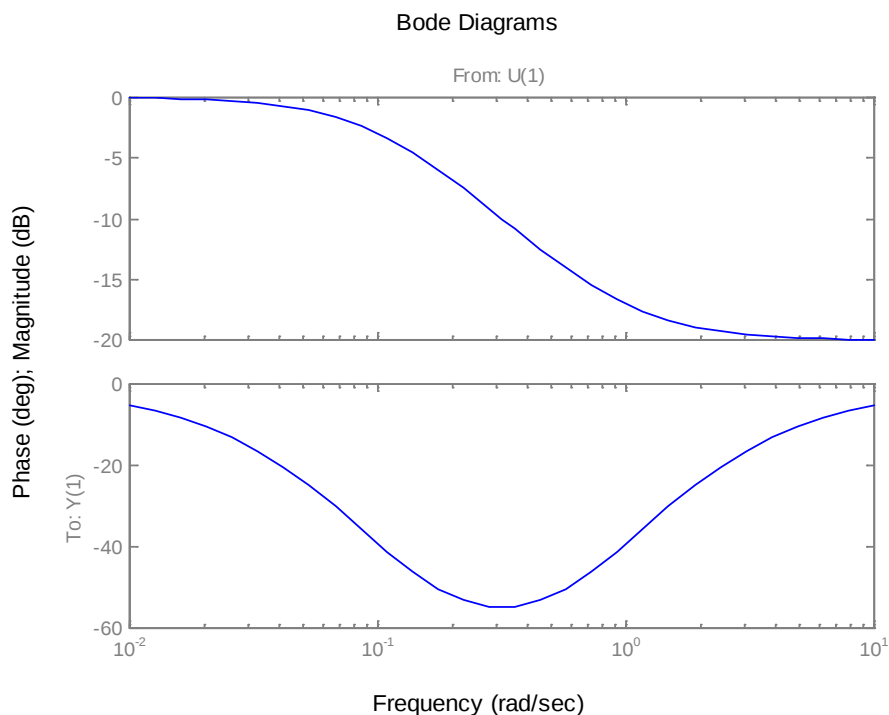


Fig. 12.5 Diagrama de Bode do sistema de fase mínima $G_1(j\omega)$

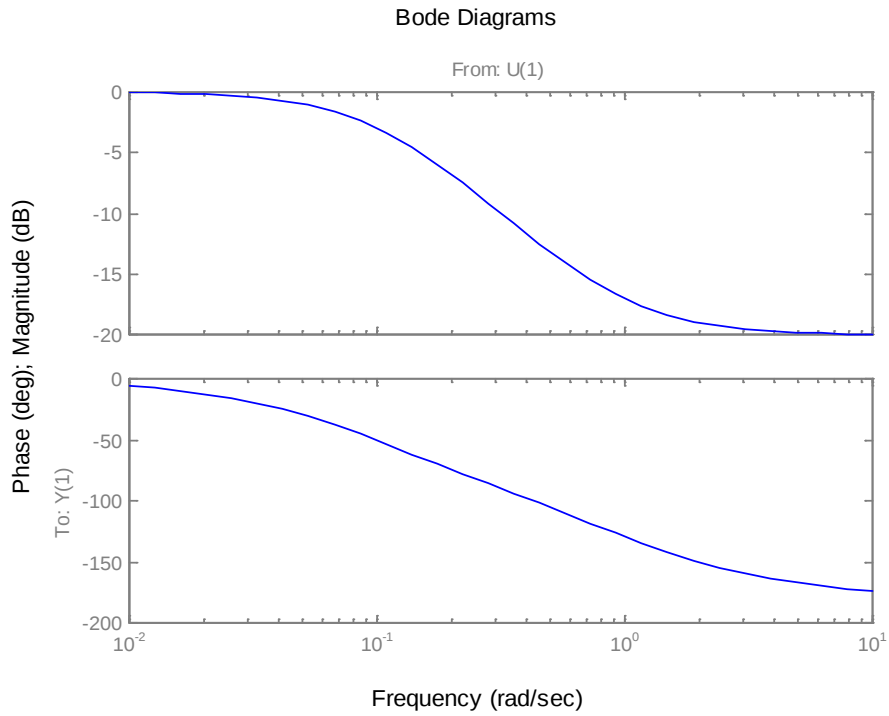


Fig. 12.6 Diagrama de Bode do sistema de fase não mínima $G_2(j\omega)$

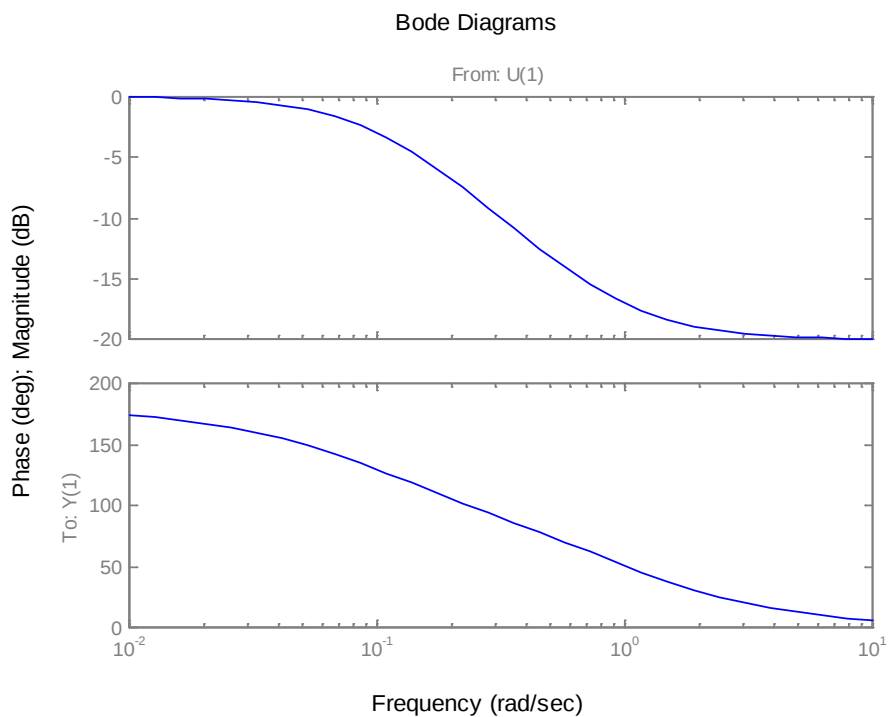


Fig. 12.7 Diagrama de Bode do sistema de fase não mínima $G_3(j\omega)$

Para um sistema de fase mínima os diagramas de módulo e de fase estão biunivocamente determinados, isto é, conhecendo-se um deles pode-se determinar o outro. Este não é o caso dos sistemas de fase não mínima.

Pode-se mostrar que para um sistema de fase mínima ou não mínima a inclinação do diagrama de módulo para $\omega = \infty$ tende para $-20(n-m)$ db onde n e m são, respectivamente, a ordem do denominador e numerador da função de transferência do sistema. Já a fase de um sistema de fase mínima tende para $-90^0(n-m)$ para $\omega = \infty$ e um sistema de fase não mínima tende para um outro valor que difere de $-90^0(n-m)$.

12.4 ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO NO DOMÍNIO DA FREQUENCIA

Aqui vale ressaltar que o diagrama de Bode pode ser desenhado para a função de transferência de malha aberta e para a função de transferência de malha fechada. Normalmente, no projeto de controle utilizando o diagrama de Bode, dá-se preferência ao gráfico da função de transferência em malha aberta porque a sua elaboração consiste na soma dos fatores (para o módulo e fase) que compõem $G(j\omega)$. A idéia é especificar determinados parâmetros no diagrama de Bode da função de transferência de malha aberta para obter o desempenho satisfatório do sistema de controle em malha fechada. Estes parâmetros são a margem de fase e margem de ganho que requerem a definição de frequência de cruzamento de ganho e de fase. As definições destes termos são:

- frequência de cruzamento de ganho (ω_g): frequência onde $|G(j\omega)|=1$ ou $M=0$;
- frequência de cruzamento de fase (ω_f): frequência onde $\angle G(j\omega) = -180^0$
- margem de fase: fase adicional na frequência de cruzamento de ganho para que a fase do sistema atinja -180^0
 $\gamma = 180 + \angle G(j\omega_g)$ onde γ é a margem de fase
- margem de ganho: ganho adicional na frequência de cruzamento de fase para que $|G(j\omega)|=1$

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_f)|} \text{ onde } K_g \text{ é a margem de ganho}$$

Pode-se mostrar que para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada é necessário que tanto a margem de fase como de ganho (em decibéis) sejam positivos. Este critério é válido para sistemas do tipo 0, 1 e 2. Uma análise mais rigorosa de estabilidade no domínio da frequência pode ser estabelecido através do critério de Nyquist.

Seja $G(s)$ a função de transferência de malha aberta de um sistema de controle com realimentação unitária. A função de transferência em malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Portanto, tem-se:

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$

Pode-se perceber que se for conhecido o diagrama de Bode de $G(j\omega)$ é possível construir o diagrama de Bode de $T(j\omega)$. Isto é verdade e existe um procedimento gráfico conhecido como diagrama de Nichols que permite obter $T(j\omega)$ a partir de $G(j\omega)$. No

entanto, atualmente, com o surgimento de diversos programas de computador, este tipo de procedimento caiu em desuso.

No caso do diagrama de Bode da função de transferência em malha fechada $T(j\omega)$ pode-se especificar a largura de banda (ou banda passante), o pico de ressonância e a taxa de corte.

- **Frequência de corte e largura de banda:** é a faixa $0 \leq \omega \leq \omega_b$ onde ω_b é a frequência de corte. Esta frequência é definida como a frequência a partir da qual o módulo da função de transferência em malha fechada é -3dB inferior ao módulo para frequência nula, isto é:

$$20\log|G(j\omega)| - 20\log|G(0)| < -3dB$$

Aqui vale a pena destacar a implicação física da largura de banda. Considere duas funções de transferências definidas por:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{10s+1}$$

A função $G_1(s)$, por ter constante de tempo menor do que de $G_2(s)$, responde mais rapidamente, conforme é mostrado na Fig. 12.8.

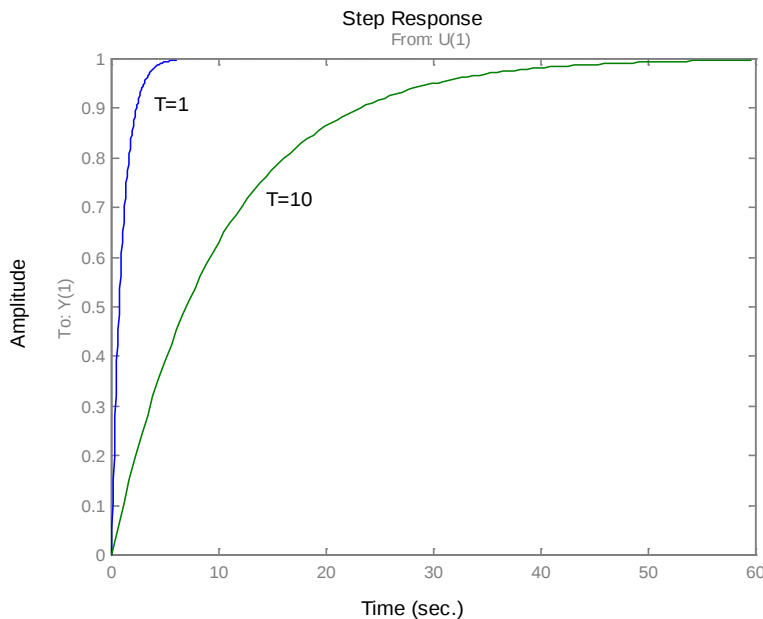


Fig. 12.8 Resposta dos sistemas de primeira ordem

Na Fig. 12.9 estão mostrados os diagrama de Bode de duas funções de transferência, e ela revela que a largura de banda da função $G_1(s)$ é maior do que de $G_2(s)$. Ou seja, se desejar sistema de controle com resposta mais rápida deve-se aumentar o largura de banda. No entanto, sistema com largura de banda maior filtra menos. Desta forma, a escolha da largura de banda é um compromisso entre a velocidade de resposta do sistema e a sua propriedade de filtragem.

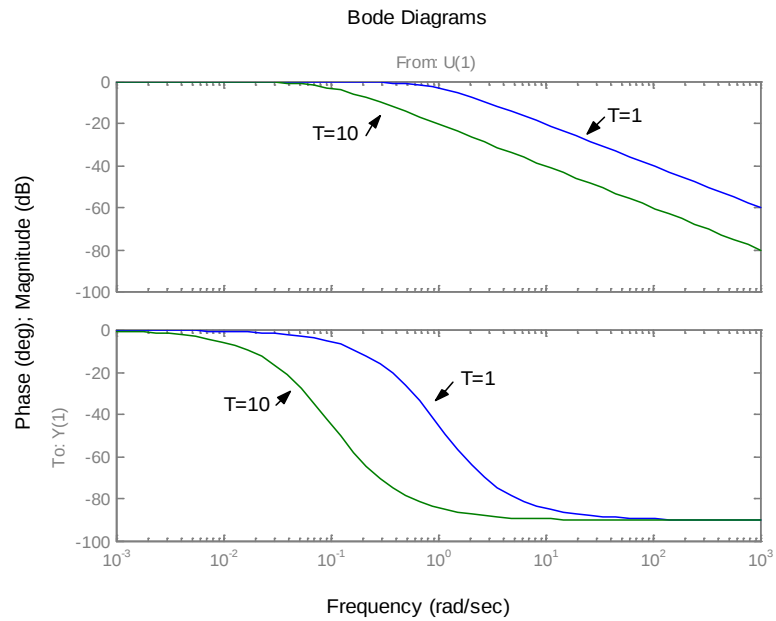


Fig. 12.9 Diagramas de Bode dos sistemas de primeira ordem

- **pico de ressonância:** é o valor máximo do módulo
-
- **taxa de corte:** A taxa de corte é a inclinação da curva do módulo em dB próxima à frequência de corte. A taxa de corte indica a capacidade de um sistema para distinguir um sinal de um ruído.