Cálculo II, A. Noturno, P1 - 2018

1) Sejam μ e L números reais positivos. Para que valores de μ (autovalores) o problema de valor de contorno $y''(x)+\mu^2 y(x)=0$, $y(0)=0$, $y(L)=0$ tem soluções, $y(x)$ (autofunções), não identicamente nulas para todo $0\leq x\leq L$. Quais são os autovalores e as autofunções correspondentes em função de L?

Sol.: Este problema foi resolvido em sala de aula. Uma discussão mais completa ($\lambda<0$, $\lambda=0$ e $\lambda>0$) encontram nos vídeos 65 e 66 do meu curso de Cálculo IV.

$$\text{P.V.C.}\begin{cases} y''(x)+\mu^2 y(x)=0 \\ y(0)=0 \\ y(L)=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix}\mu>0\\ L>0 \\ 0\leq x\leq L\end{matrix}$$

Iniciamos resolvendo a eq. dif. homogênea

$$y''(x)+\mu^2 y(x)=0$$

Propomos uma solução do tipo exponencial

$y(x)=e^{rx}$, ~~r~~ r é um parâmetro a ser determinado

Isso leva as trocas $\begin{cases} y''\to r^2 \\ y'\to r \\ y\to 1\end{cases}$

$r^2+\mu^2=0$ Eq. Característica

$r^2=-\mu^2$ (Tipo III)

$r=\pm\mu i=\alpha\pm\beta i$

$\boxed{\alpha=0}$ e $\boxed{\beta=\mu}$

$$y_{gh}(x)=e^{\alpha x}\left[C_1\cos(\beta x)+C_2\operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

$$y_{gh}(x)=\underbrace{e^{0x}}_{1}\left[C_1\cos(\mu x)+C_2\operatorname{sen}(\mu x)\right]$$

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$$ $\boxed{\mu > 0}$

- Usamos a primeira restrição: $y(0)=0$

$$0 = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0}$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

- Usamos a segunda restrição: $y(L)=0$
(já sabemos que $C_1=0$)

$$0 = C_2 \operatorname{sen}(\mu L)$$

Aqui temos dois caminhos

i) $C_2 = 0$ logo $C_1=C_2=0$ e $y_{PVC}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Essa é a solução identicamente nula que não é de interesse.

ii) $C_2 \neq 0$ e $\operatorname{sen}(\mu L) = 0$

A função seno se anula quando seu argumento é múltiplo de π. Isto é, da forma $n\pi$, com $n \in \mathbb{N}$

$$\mu L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \quad (\mu > 0 \text{ e } L > 0)$$

$$\boxed{\mu = \frac{n\pi}{L}}$$ Autovalores

$(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

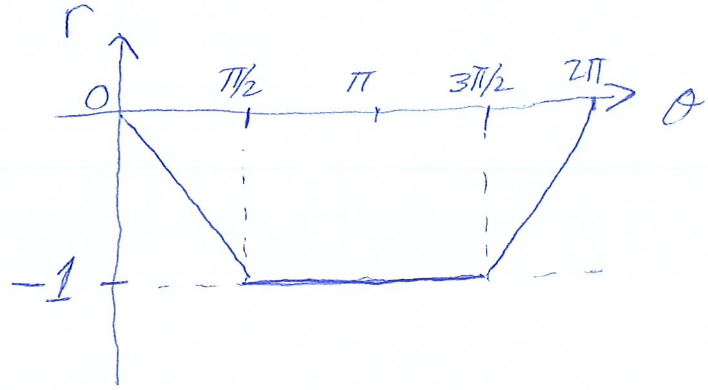
Como $C_1 = 0$ e $C_2 \neq 0$ as soluções do PVC são da forma $y_{PVC}(x) = C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$, $\mu = \frac{n\pi}{L}$

Usualmente C_2 é colocado como $C_2 = 1$ e

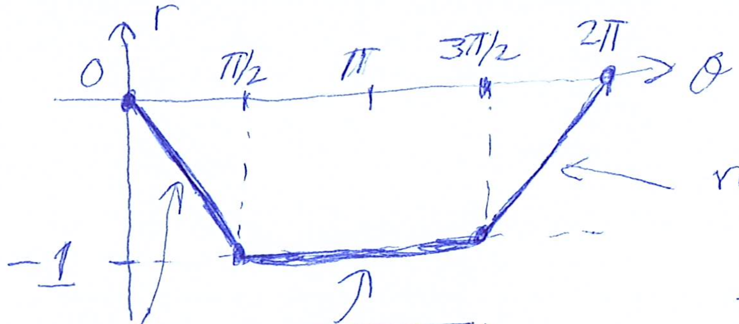
$$y_{PVC}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Autofunções = Soluções não nulas em todo o intervalo $0 < x < L$

2) A figura mostra um gráfico fictício em coordenadas cartesianas das variáveis das coordenadas polares r e θ. Esboce o gráfico cartesiano correspondente à curva polar dada.



Sol:



reta fictícia

$$\begin{cases} r = m\theta + b \\ \theta = 2\pi \to r = 0 \\ \theta = 3\pi/2 \to r = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 2\pi + b \\ -1 = m\frac{3\pi}{2} + b \end{cases}$$

$$1 = m\left(2\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = m\,\pi/2$$

$$\boxed{m = \frac{2}{\pi}}$$

$$b = -2\pi m = -2\pi\frac{2}{\pi} = - \quad \boxed{b = -4}$$

$$\boxed{r = \frac{2}{\pi}\theta - 4}$$

$$\boxed{\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi}$$

Espiral (Pedaço)

reta fictícia

$$\begin{cases} r = m\theta + b \\ \theta = 0 \to r = 0 \\ \theta = \pi/2 \to r = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \to \boxed{b = 0} \\ -1 = m\,\pi/2 + b \end{cases}$$

$$\boxed{m = -\frac{2}{\pi}}$$

$$\boxed{r = -\frac{2}{\pi}\theta}$$

$$\boxed{0 \le \theta \le \pi/2}$$

Espiral (Pedaço)

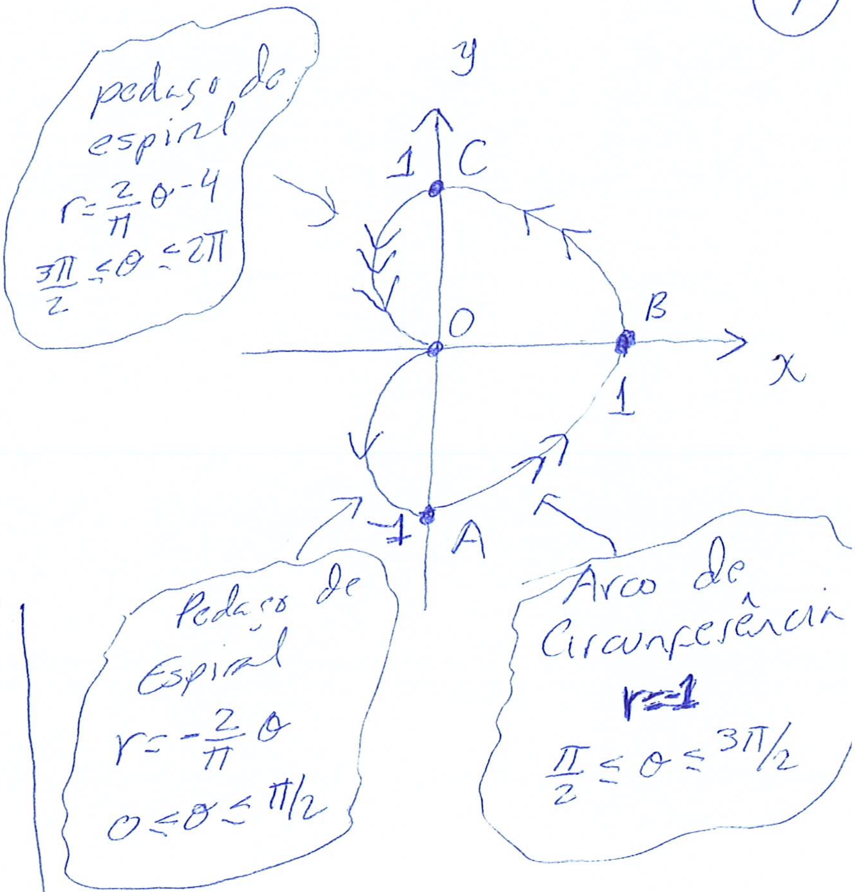
$$\boxed{r = -1}$$

Circunferência (Arco)

Continua...

Continuação de 2)

θ	r	Ponto
0	0	O (origem)
$\pi/2$	-1	A
π	-1	B
$3\pi/2$	-1	C
2π	0	O (origem)



Um exemplo mais elaborado deste tipo de problema encontram no vídeo 66 do curso.

3) Determine se a série converge ou diverge (Justifique). Se ela convergir, encontre a soma:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(n-1)(n+1)}$$

<u>Sol.:</u> A série é do tipo Telescópica. O vídeo 114 discute a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)}$. Na aula encontramos a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. A série deste problema foi encontrada trocando $n \to n-1$ e $n+2 \to n+1$.

continua...

Seja $a_n = \dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$. Vamos usar a decomposição de a_n em frações parciais

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+B(n-1)}{(n-1)(n+1)}$$

$$0 \cdot n + 1 = (A+B)n + (A-B)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \rightarrow \boxed{A=-B} \\ A-B=1 \rightarrow -2B=1 \rightarrow \boxed{B=-\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Vamos escrever explicitamente os primeiros termos da sequência (a_n) (sequência geradora da série) e da sequência (s_n) (sequência das somas parciais).

n	a_n	s_n
2	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$
3	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$
4	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$
5	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$	?

Sobram os dois primeiros $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ e os dois últimos

Conjetura: $\boxed{s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}$

$$\lim_{n\to\infty}(s_n) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

continua.

Como o limite existe a série é <u>convergente</u> 6

e sua soma é 3/4

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4}}$$

4) Determine e justifique se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

<u>Sol.:</u> Seja $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. Temos que $|a_n| = \frac{1}{n^2}$. Vamos estudar a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Ela é uma série-p, com $p=2>1$, convergente. (Vídeo 120)

Logo, como $\sum |a_n|$ é convergente temos que $\sum a_n$ é ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE (Vídeo 127)

5) Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência: (7)

$$f(x) = \frac{x}{x-3}$$

Sol.: Seja $g(x) = \frac{1}{x-3}$. Queremos usar o fato que $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ quando } |x|<1}$ série geométrica com $a=1$ e $q=x$

$\boxed{\text{Vídeo } 133}$

Vamos re-escrever $g(x)$ como

$$g(x) = \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3(\frac{x}{3}-1)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(\frac{x}{3})}\right)$$

Trocando $x \to \frac{x}{3}$ em $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ temos

$$g(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \text{quando } \left|\frac{x}{3}\right|<1$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} \quad \text{quando } |x|<\boxed{3=R} \text{ Raio de Convergência}$$

Temos que a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ é convergente quando $-3<x<3$ e divergente quando $|x|>3$.

Vamos estudar agora os pontos extremos: i) $x=3$ e ii) $x=-3$.

i) $x=3$, a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ se transforma em $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ que é uma série divergente pelo teste da divergência $\lim_{n\to\infty}(1) = 1 \neq 0$.

continua...

ii) $x=-3$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{x}^n}{3^n}$ se transforma em $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n}$ (8)

ou $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ que é divergente pelo teste da divergência

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe.

Conclusão, o intervalo de convergência é $-3 < x < 3$.

Como $f(x) = x\,g(x)$ temos

$$f(x) = \frac{x}{x-3} = x\left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}$$

$$\forall x \in (-3,3)$$